Die ersten Grundlehren

der

höhern Analysis

oder der

Differenzial- und Integralrechnung.

Für das Studium

der

praktischen Mechanik und Naturlehre

möglichst populär

bearbeitet

von

Dr. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg;
Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg u. s. w.

Mit 38 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1860.


PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA
7454

Vorwort.

Die vorliegende kleine Schrift ist zwar zunächst nur für die Leser der Ingenieur- und Maschinenmechanik des Verfassers bestimmt, sie wird aber auch denjenigen Studirenden der Naturlehre und Mechanik überhaupt von Nutzen sein, welche ohne ein umfängliches Vorstudium der höheren Mathematik in ein tieferes Studium der genannten Wissenschaften einzugehen wünschen. Es enthält dieselbe eine gedrängte und möglichst faßliche Darstellung der Differenzial- und Integralrechnung oder des sogenannten Infinitesimalcalculs. Der Verfasser gehört nicht zu Denjenigen, welche dem bekannten Ausspruche Euklid's: »Zur Geometrie giebt es keinen besonderen Weg für Könige,« unbedingt anhängen; er ist wenigstens der Meinung, daß es mehr als einen Weg giebt, welcher in das Gebiet der Geometrie und Mathematik überhaupt führt. Welchen Nutzen würde diese Wissenschaft schon gestiftet haben, wenn man allgemein und immer bemüht gewesen wäre, neben einem wissenschaftlichen (esoterischen) Wege noch einen populären oder akroamatischen Weg in das Gebiet der Mathematik aufzuführen! Gewiß würde man dadurch nicht allein der Naturlehre und Technik, sondern auch der allgemeinen Bildung überhaupt einen großen Vorschub geleistet, der Mathematik als Wissenschaft aber keineswegs Nachtheile zugefügt, sondern vielmehr manchen tüchtigen Jünger zugeführt haben! In anderen Wissenschaften ist man darin der Mathematik vorausgegangen, und wer wird es leugnen, daß durch die populären Schriften über Naturwissenschaften nicht schon sehr viel Nutzen gestiftet worden sei? Allerdings bietet eine populäre Darstellung der Mathematik, wenn darunter

nicht eine bloße Zusammenstellung von Regeln und Formeln ohne Entwickelungen und Beweise verstanden wird, manche Schwierigkeiten dar, allein der Erfolg, den man davon erlangt, ist auch desto belohnender. Die für die Anwendung der Mathematik so sehr nöthige Umsicht, Sicherheit und Fertigkeit läßt sich durch eine bloße Zusammenstellung von Formeln und Regeln gewiß nie erlangen, wohl aber ist dies möglich durch das Studium einer mehr das Einzelne als das Allgemeine ins Auge fassenden populären Schrift. Diese Ansichten sind das Resultat vielseitiger und vieljähriger Erfahrungen, zu welchen der Verfasser durch Unterrichtsertheilung und durch den Verkehr mit der Praxis gelangt ist.

Julius Weisbach.

Inhalt.

Hülfslehren aus der Analysis.

Art. 1. Die Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x wird durch eine mathematische Formel, z. B. $y = 3x^2$, oder $y = ax^m$ u. s. w. angegeben. Man schreibt allgemein $y = f(x)$ oder $z = \varphi(y)$ u. s. w., und nennt y eine Funktion von x, so wie z eine Funktion von y. Die Zeichen f, φ u. s. w. deuten nur allgemein an, daß y von x, oder z von y abhänge; sie lassen die Abhängigkeit dieser Größen von einander ganz unbestimmt, schreiben also die algebraische Operation, durch welche y aus x, oder z aus y hervorgeht, nicht vor.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine unbestimmte Gleichung; es giebt unendlich viele Werthe von x und y, welche derselben entsprechen, giebt man jedoch die eine (x), so ist die andere (y) durch die Funktion bestimmt, und verändert man die eine, so erleidet die andere ebenfalls eine Veränderung. Man nennt deshalb die unbestimmten Größen x und y Variable oder veränderliche Größen, dagegen die gegebenen oder als gegeben anzusehenden Größen, die also die Operation vorschreiben, durch welche y aus x hervorgeht, Constanten oder beständige Größen. Von den veränderlichen Größen heißt diejenige, welche willkürlich anzunehmen ist, die Urvariable, und dagegen diejenige, welche als Funktion der letzteren durch eine bestimmte Operation aus dieser bestimmt wird, die Abhängigvariable. In $y = ax^m$ sind a und m die Constanten und es ist x die Ur-, dagegen y die Abhängigvariable.

Die Abhängigkeit einer Größe z von zwei anderen x und y wird durch das Zeichen $z = f(x,y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle z Funktion von x und y zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

Art. 2. Jede durch eine Funktion oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x läßt sich durch

eine ebene Curve oder krumme Linie APQ, Fig. 1. und Fig. 2., darstellen; den verschiedenen Werthen der Urvariablen x entsprechen die Abscissen AM, AN u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen

Fig. 1.

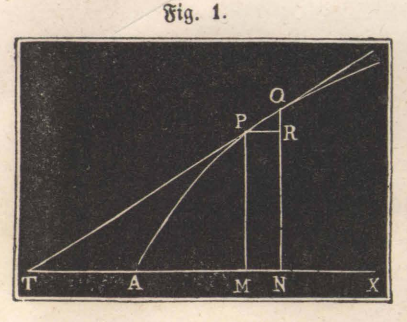
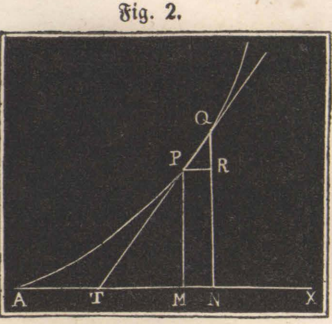
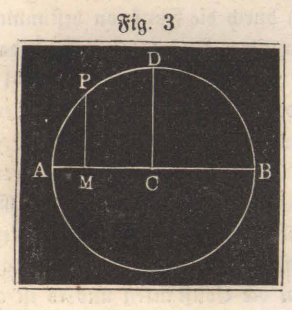


Fig. 2.



y die Ordinaten MP, NQ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Funktion vor. Die graphische oder bildliche Darstellung einer Funktion oder die Zurückführung derselben auf eine Curve, vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick von dem Zusammenhange zwischen zwei veränderlichen Größen, sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle, oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Funktion, sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannichfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Funktionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis ADB, Fig. 3., welcher der Funktion $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Funktion annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Funktion bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Funktion haben, wie wir besonders im Folgenden sehen werden.

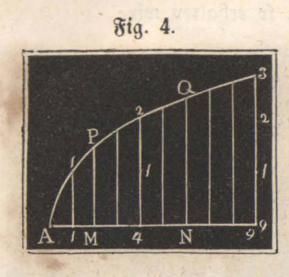
Fig. 3



Art. 3. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel durch Funktionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig. Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit y, welche der Fallhöhe x entspricht, $y = \sqrt{2gx}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{px}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter (p) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung $(2g)$ der

Schwere, daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel APQ, Fig. 4., mit dem Parameter $p = 2g$ graphisch darstellen. Die Abscissen AM, AN .. dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten MP, NQ .. die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.



Ist a ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man dem Mariotte'schen Gesetze zu Folge das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von x Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$ ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

» $x = 10$ » $y = \frac{a}{10}$, » $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, » $x = \infty$, $y = 0$;

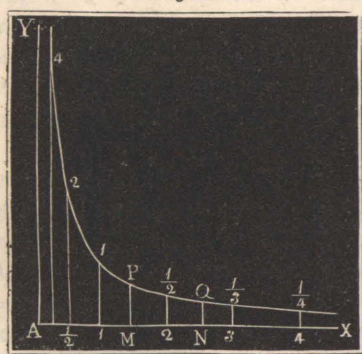
man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung x ein unendlich kleines Volumen y entspräche.

Ferner $x = \frac{1}{2}$ giebt $y = 2a$, $x = \frac{1}{4}$, giebt $y = 4a$,
$x = \frac{1}{10}$ » $y = 10a$, $x = 0$, » $y = \infty a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, je größer fällt auch das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5. abgebildet; AM, AN .. sind die Spannungen oder Abscissen, MP, NQ .. die entsprechenden Volumen oder Ordinaten. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen AX und AY der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

Fig. 5.



Die Abhängigkeit der Expansivkraft y des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur x läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel

$$y = \left(\frac{a+x}{b}\right)^m \text{ Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und

$m = 6$. Wenn wir hiernach $y = \left(\frac{75 + x}{175}\right)^6$ setzen, und eine unbeschränkte Richtigkeit dieser Formel annehmen, so erhalten wir:

$$\text{für } x = 100^0,\ y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = \ 1 \text{ Atmosphäre,}$$

$$\text{» } x = 50^0,\ y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133 \text{ »}$$

$$\text{» } x = 0^0,\ y = \left(\frac{75}{175}\right)^6 = 0{,}006 \text{ »}$$

$$\text{» } x = -75^0,\ y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000 \text{ »}$$

$$\text{ferner für } x = 120^0,\ y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914 \text{ »}$$

$$\text{» } x = 150^0,\ y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517 \text{ »}$$

$$\text{» } x = 200^0,\ y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058 \text{ »}$$

Fig. 6.

Die entsprechende Curve führt PQ, Figur 6., vor Augen; man sieht dieselbe geht in einem Abstande $AO = -75$ vom Anfangspunkte A der Coordinaten durch die Abscissenaxe, und in einem Abstande $AS = 0{,}006$ von eben diesem Punkte durch die Ordinatenaxen; ferner einer Abscisse $AM < 100$ entspricht eine Ordinate MP unter 1 und einer Abscisse $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch ist wahrzunehmen, daß nicht nur y mit x in's Unendliche wächst, sondern auch, daß die Curve immer steiler und steiler ansteigt, je größer x wird.

Art. 4. Wenn man die Urvariable einer Funktion oder Abscisse $AM = x$, Fig. 7. und 8. auf folg. S., der entsprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch dx zu bezeichnende Größe MN wachsen läßt, so geht die entsprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch dy zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer dx und dy von x und y nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten x und y, und es ist nun unsere Haupt-

aufgabe, für die am häufigsten vorkommenden Funktionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen den zusammengehörigen Elementen

Fig. 7.

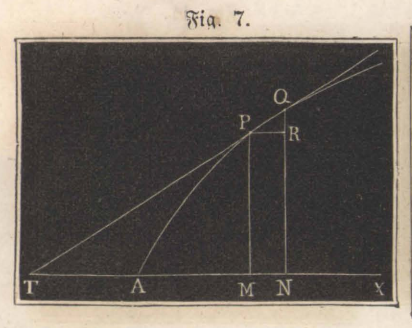
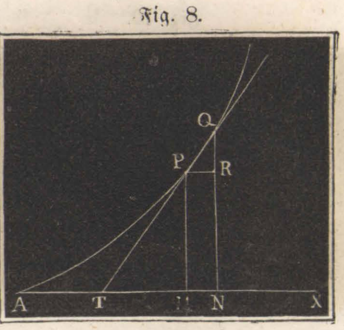


Fig. 8.



ihrer Variablen x und y zu finden. Setzt man in der Funktion $y = f(x)$, wo x die Abscisse AM und y die Ordinate MP vorstellt,

statt x, $x + dx = AM + MN = AN$, so erhält man

statt y, $y + dy = MP + RQ = NQ$, also

$$y + dy = f(x + dx),$$

und zieht man hiervon den ersten Werth von y ab, so bleibt das Element oder Differenzial der Variablen y, d. i. $dy = df(x) = f(x + dx) - f(x)$ übrig.

Dies ist die allgemeinste Regel zur Bestimmung des Differenziales einer Funktion, aus welcher sich durch Anwendung auf verschiedene Funktionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten lassen.

Ist z. B. $y = x^2$, so hat man

$$dy = (x + dx)^2 - x^2, \text{ oder, da}$$

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2 \text{ zu setzen ist,}$$

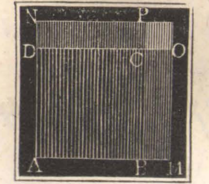
$$dy = 2x dx + dx^2 = (2x + dx)\, dx;$$

und einfacher, da dx als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verschwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von dx nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelassen werden kann,

$$dy = d(x^2) = 2x dx.$$

Es entspricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 9., dessen Seite $AB = AD = x$ ist, und es läßt sich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = dx$, das Quadrat um zwei Rechtecke BO und $DP = 2x dx$ und um ein Quadrat $OP = (dx)^2$ wächst, daß also bei einem unendlich kleinen Wachsthum dx von x, das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2x dx$ zunimmt.

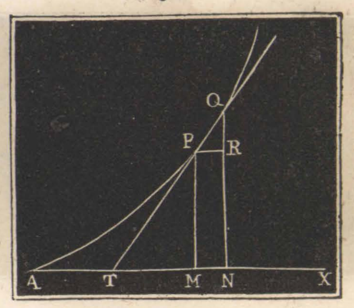
Fig. 9.



Art. 5. Die gerade Linie PQ, Fig. 10. und 11., welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte P und Q einer Curve geht, heißt Tangente

Fig. 10.

Fig. 11.



oder Berührungslinie dieser Curve und giebt die Richtung derselben zwischen diesen Punkten an. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $PTM = \alpha$ an, unter welchem die Abscissenaxe AX von dieser Linie geschnitten wird. Bei einer concaven Curve wie APQ, Fig. 10., liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abscissenaxe, bei einer convexen Curve APQ, Fig. 11., hingegen befindet sie sich zwischen der Curve und Abscissenaxe.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, Fig. 10. und 11., mit den Katheten $PR = dx$ und $RQ = dy$ ist der Winkel QPR gleich dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$, und da

$$tang.\ QPR = \frac{QR}{PR} \text{ ist,}$$

so hat man auch

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx},$$

es giebt also das Verhältniß oder der Quotient der beiden Elemente dy und dx die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ setzt, $dz = (y + dy)^2 - y^2 = y^2 + 2ydy + dy^2 - y^2 = 2ydy + dy^2$, oder da dy^2 gegen $2ydy$ oder, was auf eins herauskommt, dy gegen $2y$ verschwindet,

$$dz = 2ydy, \text{ und ebenso}$$
$$dz = p(x + dx) - px = pdx.$$

Es ist hiernach $2ydy = pdx$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}.$$

In der Regel nennt man das bestimmte Stück PT der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte P und dem Durchschnittspunkte T mit der Abscissenaxe, Tangente, und die Projection TM desselben in der Abscissenaxe, Subtangente, und hat daher

$$subtang.\ TM = PM\ cotang.\ PTM$$
$$= y\ cotang.\ \alpha = y\,\frac{dx}{dy},$$

z. B. bei der Parabel $subtang. = y\,.\,\frac{2x}{y} = 2x$. Es ist also hier die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt P der Parabel leicht anzugeben.

Art. 6. Für eine Funktion $y = a + m\,f(x)$ hat man

$$dy = [a + m\,f(x + dx)] - [a + m\,f(x)]$$
$$= a - a + mf(x + dx) - mf(x)$$
$$= m\,[f(x + dx) - f(x)];$$

d. i. I. $d\,[a + m\,f(x)] = m\,df(x)$,

z. B. $d(5 + 3x^2) = 3[(x + dx)^2 - x^2] = 3\,.\,2x\,dx = 6\,x\,dx$.

Es ist ebenso $d(4 - \frac{1}{2}x^3) = -\frac{1}{2}d(x^3) = -\frac{1}{2}[(x + dx)^3 - x^3]$ $= -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3) = -\frac{1}{2}.3x^2dx = -\frac{3}{2}x^2dx$.

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufstellen: Die constanten Glieder (a, 5) einer Funktion verschwinden beim Differenziiren, und die constanten Faktoren (m, 3) bleiben hierbei unverändert.

Die Richtigkeit dieser Regel läßt sich auch graphisch darthun. Für die Curve APQ, Fig. 12., deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und $MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1M_1 = x$ und $M_1P = a + y$ $= a + f(x)$ sind, ist $PR = dx$ und $RQ = dy = df(x)$ und auch $= d\,(a + y) = d\,[a + f(x)]$; und für die Curven AP_1Q_1 und APQ, Fig. 13., deren zusammengehörige Ordinaten MP_1 und MP, so wie

Fig. 12.

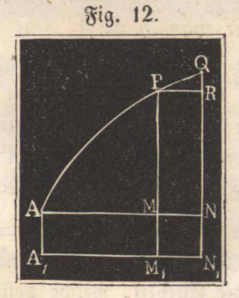
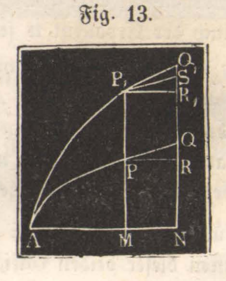


Fig. 13.



NQ_1 und NQ ein gewisses Verhältniß zu einander haben, ist auch das Verhältniß zwischen den Differenzialien $Q_1R_1 = NQ_1 - MP_1$ und

$QR = NQ - MP$ beständig dasselbe, ist also $MP_1 = m MP = m f(x)$, so hat man auch $R_1 Q_1 = m RQ$, d. i. $d[mf(x)] = m d f(x)$.

Ist $y = f(x) + \varphi(x)$, so hat man

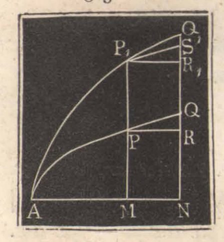
$$dy = f(x + dx) + \varphi(x + dx) - f(x) - \varphi(x)$$
$$= f(x + dx) - f(x) + \varphi(x + dx) - \varphi(x),$$

d. i. II. $d[f(x) + \varphi(x)] = d f(x) + d\varphi(x)$.

Es ist also das Differenzial von der Summe aus mehreren Funktionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Funktionen.

Z. B. $d(2x + 3x^2 - {}^1\!/_2 x^3) = 2dx + 6 x dx - {}^3\!/_2 x^2 dx$
$= (2 + 6x - {}^3\!/_2 x^2)\, dx$.

Fig. 14.

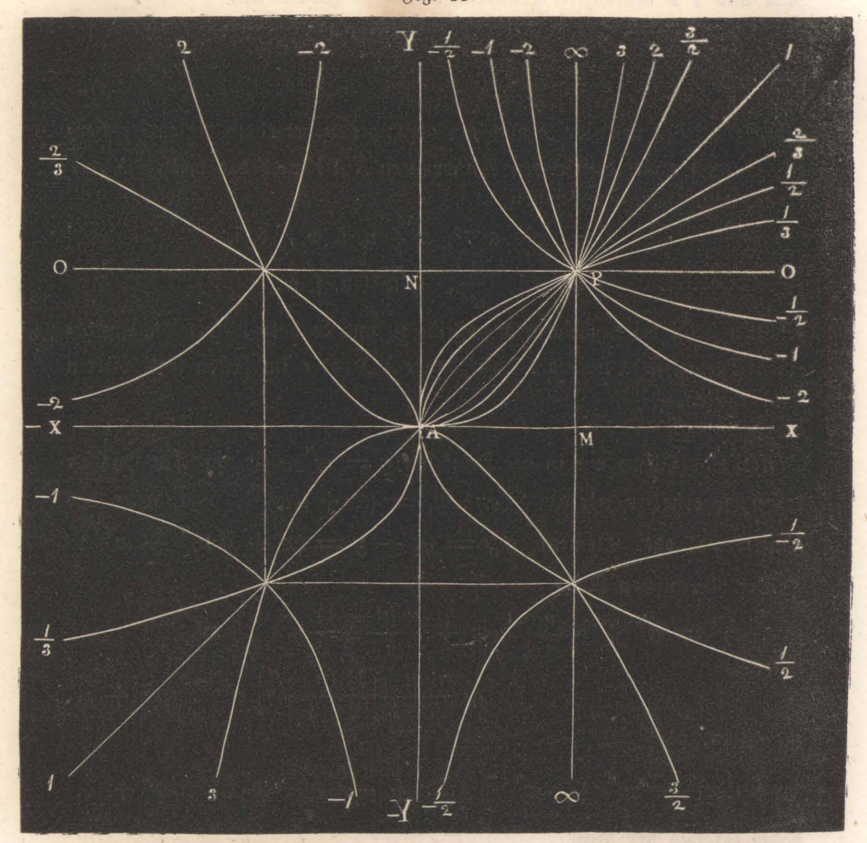


Die Richtigkeit dieser Regel ist auch aus der Betrachtung einer Curve APQ, Fig. 14., abzuleiten. Ist $MP = f(x)$ und $P_1 P = \varphi(x)$, so hat man $MP_1 = y = f(x) + \varphi(x)$, und $dy = R_1 Q_1 = R_1 S + SQ_1 = RQ + SQ_1$ $= df(x) + d\varphi(x)$, da $P_1 S$ parallel zu PQ gelegt werden und deshalb $R_1 S = RQ$ und $QS = PP_1$ gesetzt werden kann.

Art. 7. Die Funktion $y = x^n$ ist die wichtigste der ganzen Analysis, weil man fast bei allen Untersuchungen auf dieselbe stößt. Wenn man dem Exponenten n alle möglichen Werthe, positive und negative, ganze und gebrochene u. s. w. beilegt, so liefert sie auch die verschiedenartigsten Curven, wie durch Fig. 15. a. f. S. veranschaulicht wird. Es ist hier A der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten, $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinaten-Axe. Setzt man in $y = x^n$, $x = 1$, so erhält man auch $y = 1$, macht man daher die Coordinaten AM und $MP = 1$, oder construirt man aus $AM = AN = 1$ ein Quadrat, so erhält man in dem Eck P desselben den Punkt, durch welchen die Curve stets gehen muß, welches auch der Exponent n sein möge. Nimmt man $n = 1$, setzt man also $y = x$, so bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade $(1 A 1)$; nimmt man $n > 1$, so erhält man convexe Curven, setzt man dagegen $n < 1$, so ergeben sich concave Curven; jene laufen anfangs unter und von P aus über der geraden Linie $(1 A 1)$ hin, bei diesen ist das Umgekehrte der Fall. Für $n = 0$ ist $y = x^0 = 1$, und für $n = \infty$ ist $y = x^\infty = x^{1/0}$, also umgekehrt $x = y^0 = 1$; der ersten dieser beiden Gleichungen entspricht die Gerade $(0 P 0)$ und der zweiten die Gerade $(\infty P \infty)$. Man sieht, die Curven, welche positiven Werthen von n entsprechen, ziehen sich anfangs unter, und von P aus über der Geraden $(0 P 0)$ hin, die Curven, welche aus negativen Werthen

von n resultiren, laufen hingegen erst über, und jenseits P unter $(0P0)$ hin. Für jene Curven ist für $x = 0$ auch $y = 0$ und für $x = \infty$

Fig. 15.



auch $y = \infty$, für diese hingegen für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$ $y = 0$. Während sich jene immer mehr und mehr von den Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man sie verfolgt, nähern sich diese einerseits immer mehr und mehr der Axe $X\overline{X}$ und andererseits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne sie jedoch wirklich zu erreichen.

Die Funktionen $y = x^{1/2}$, $x^{3/2}$, $x^{-1/2}$ u. s. w., d. i.

$$y = \sqrt{x},\ \sqrt{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ u. s. w.}$$

geben für jedes x einen positiven und einen gleich großen negativen, für

ein negatives x aber einen imaginären Werth; deshalb finden sich auch die entsprechenden Curven nur im ersten und zweiten der von den Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ begrenzten Quadranten. Die Funktionen

$$y = x^{-1},\ x^{1/3},\ x^{5/3} \text{ u. s. w., d. i.}$$

$$y = \frac{1}{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{x^5} \text{ u. s. w.}$$

geben für jedes negative x auch ein negatives y, weshalb die entsprechenden Curven außer dem ersten Quadranten XAY noch den dritten $\overline{X}A\overline{Y}$ einnehmen. Die Funktionen

$$y = x^2,\ x^{-2},\ x^{2/3} \text{ u. s. w., d. i.}$$

$$y = x^2,\ \frac{1}{x^2},\ \sqrt[3]{x^2} \text{ u. s. w.}$$

erhalten selbst bei negativem x positive y, und deshalb bleiben die zugehörigen Curven stets über der Abscissenaxe $X\overline{X}$ oder im ersten und vierten Quadranten.

Art. 8. Wenn wir in der Funktion $y = x^n$, x um dx wachsen lassen, so erhalten wir den Werth $y_1 = (x + dx)^n$, und daher das Differenzial oder Element $dy = y_1 - y = (x + dx)^n - x^n$.

Der binomischen Reihe

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

zufolge ist aber

$$(x + dx)^n = x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots,$$

daher erhalten wir denn

$$dy = d(x^n) = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots$$

$$= \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots\right) dx;$$

oder da $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots$ wegen der unendlichen Kleinheit von dx gegen $n x^{n-1}$ verschwindet, $d(x^n) = n x^{n-1} dx$.

Z. B. $d(x^5) = 5x^4 dx$, $d(\sqrt{x^3}) = d(x^{3/2}) = {}^3\!/_2\, x^{1/2} dx$,

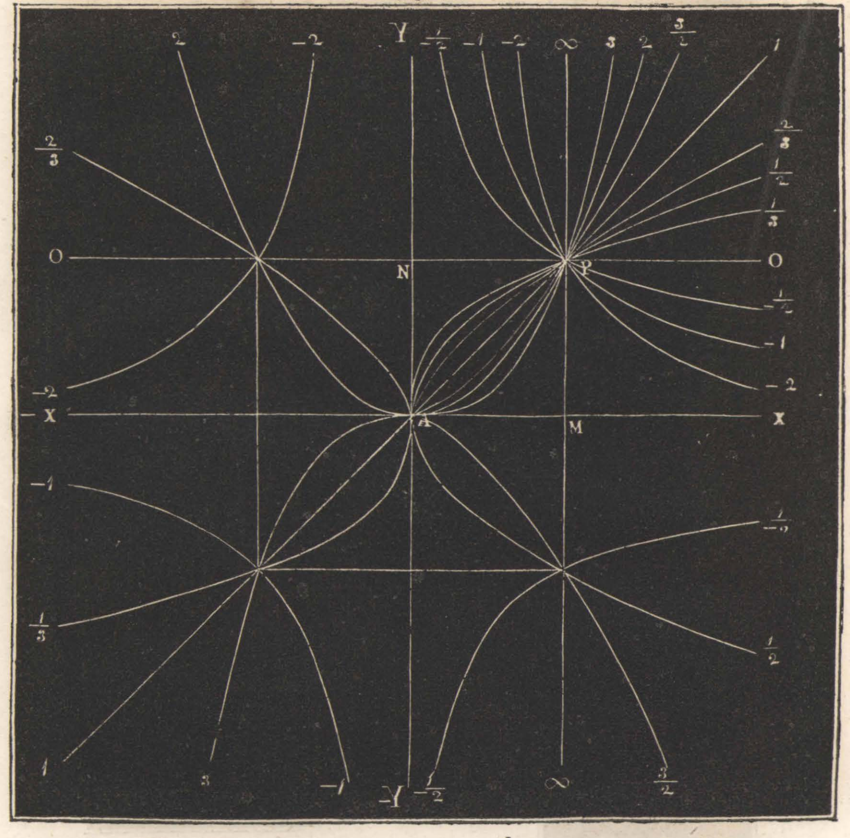
$$d\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4d(x^{-2}) = -8x^{-3} dx; \text{ ferner}$$

$$d\sqrt{2rx-x^2} = d\sqrt{u} = d(u^{1/2}) = {}^1\!/_2\, u^{-1/2}du = {}^1\!/_2\, \frac{d(2rx-x^2)}{u^{1/2}}$$

$$= {}^1\!/_2 \cdot \frac{2r\,dx - 2x\,dx}{\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Aus der wichtigen Formel $d\,(x^n) = n\,x^{n-1}\,d\,x$ folgt nun auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 16. abge-

Fig. 16.



bildeten Curven; es ist nämlich $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$.

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $y = \sqrt[2]{\frac{x^3}{a}}$ ist,

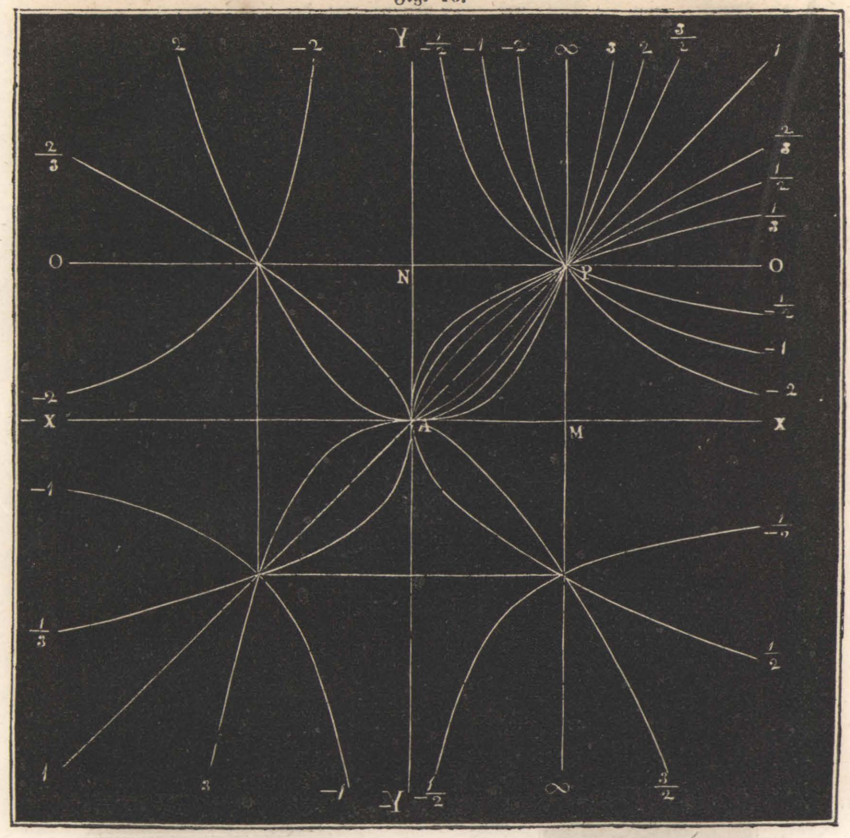
$$tang.\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{d\,(x^{3/2})}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,.\,{}^3\!/_2\, x^{1/2} = {}^3\!/_2 \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

$$d\sqrt{2rx-x^2} = d\sqrt{u} = d(u^{1/2}) = \frac{1}{2}u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\frac{d(2rx-x^2)}{u^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2r\,dx - 2x\,dx}{\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Aus der wichtigen Formel $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$ folgt nun auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 16. abge-

Fig. 16.



bildeten Curven; es ist nämlich $tang.\alpha = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $y = \sqrt[2]{\frac{x^3}{a}}$ ist,

$$tang.\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{d\,(x^{3/2})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,.\,\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Art. 9. Wenn man in dem Elementeverhältniß $\frac{dy}{dx}$ oder in der Formel für die Tangente des Tangentenwinkels für x nach und nach verschiedene Werthe setzt, so erhält man durch dieselbe die verschiedenen Lagen der Berührungslinie. Nimmt man $x = 0$, so erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Anfangspunkt, nimmt man $x = \infty$, so erhält man dieselbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigsten sind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten x und y ihren größten oder kleinsten Werth hat, oder, wie man sagt, ein Maximum oder Minimum ist. Für den Parallelismus mit der Abscissenaxe hat man $\alpha = 0$, also auch $tang. \alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, also $tang\ \alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: man findet diejenigen Werthe der Abscisse oder Urvariablen x, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen y entsprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{dy}{dx} = 0$, oder $= \infty$ setzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinsicht auf x auflöst.

Z. B. für die Gleichung $y = 6x - \frac{9}{2}x^2 + x^3$, welcher der Curve $APQR$ in Fig. 17. entspricht, ist

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 9x + 3x^2 = 3(2 - 3x + x^2) = 3(1 - x)(2 - x),$$

und es folgt durch Nullsetzen von $\frac{dy}{dx}$, $1 - x = 0$ und $2 - x = 0$,

Fig. 17.

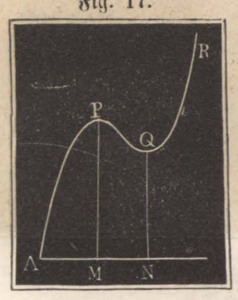
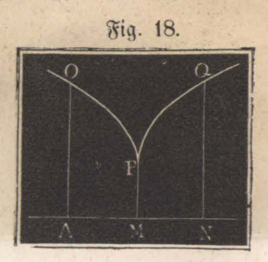


Fig. 18.



d. i. $x = 1$ und $x = 2$. Diese Werthe in die Formel

$$y = 6x - \frac{9}{2}x^2 + x^3$$

gesetzt, ergiebt sich der Maximalwerth von y: $MP = 6 - \frac{9}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ und der Minimalwerth $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve OPQ, Fig. 18., deren Gleichung $y = a + (x - b)^{\frac{2}{3}}$

ist, hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}}$, und um nun den Minimalwerth MP von y zu finden, setzt man $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. i. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}} = \infty$, $3\sqrt[3]{x-b} = 0$, d. i. $x = b$. Der entsprechende Minimalwerth ist $y = a$; nimmt man dagegen $x = 0$, so erhält man $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, und nimmt man $x = 2b$, so stellt sich ebenfalls $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, also in beiden Fällen ein größerer Werth von y heraus.

Art. 10. Sowie bei einer vom Anfangspunkte A aus aufsteigenden Curve y mit x wächst, und deshalb dy positiv ist, bei einer niedersteigenden hingegen y abnimmt, wenn x größer wird, und deshalb dy negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe AX parallel läuft, dy Null ist, ebenso sind die gleichen Abscissen-Elementen $dx = MN = NO = PS = QT \ldots$ entsprechenden Ordinaten-Elemente $SQ = PS\ tang.\ QPS$, d. i. $dy = dx\ .\ tang.\ \alpha_1$,
$TR = QT\ tang.\ RQT$, d. i. $dy = dx\ .\ tang.\ \alpha_2$ u. s. w.
und also auch die Tangentenwinkel α_1, α_2 u. s. w. bei einer convexen Curve APR, Fig. 19. im Wachsen und bei einer concaven Curve APR, Fig. 20., im Abnehmen begriffen, es ist folglich im ersten Falle

Fig. 19.

Fig. 20.

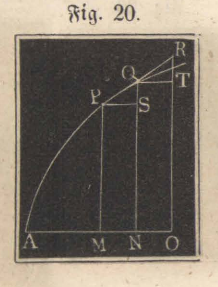
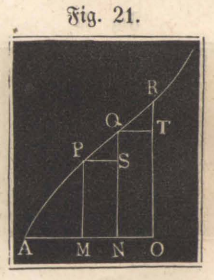


Fig. 21.



$$d(tang\ \alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ positiv,}$$

und im zweiten $d\ (tang.\ \alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ negativ, und man hat endlich auch für den **Wendepunkt** Q, Fig. 21., d. i. für die Stelle Q der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte stattfindet, auch $QS = RT$, und daher

$$(tang.\ \alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{Null.}$$

Es gilt also die Regel: ist das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels positiv, so besitzt die Curve Convexität, ist es negativ, so hat dieselbe Concavität, und ist es Null, so hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch ist hiernach leicht Folgendes zu ermessen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abscissenaxe läuft, für welche also $tang.\,\alpha = 0$ ist, entspricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn diese convex, concav oder keines von beiden, wenn also

$d\,(tang.\,\alpha)$ positiv, oder negativ oder Null ist.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also $tang.\,\alpha = \infty$ ist, entspricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn dieselbe concav, convex oder theils concav, theils convex, wenn also $d\,(tang.\,\alpha)$ vor und nach dieser Stelle negativ,

» » » » » positiv, oder

vor dieser Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derselben.

Ein Curvenstück mit Wendepunkt Q der ersten Art führt Figur 22., und ein solches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Figur 23. vor Augen. Man sieht, die entsprechende Ordinate NQ ist weder ein Maximum noch ein Minimum, denn es sind in keinem Falle die benachbarten Ordinaten MP und OR beide größer oder kleiner als NQ.

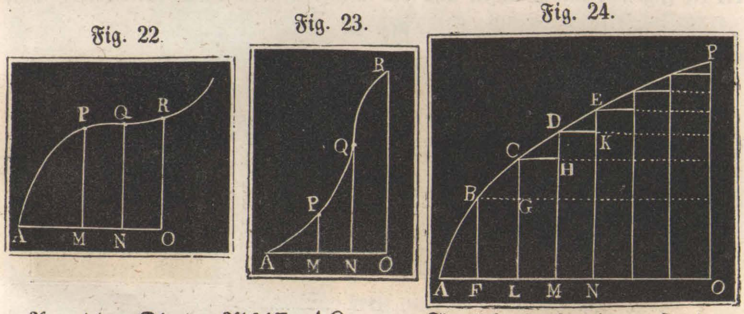


Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24.

Art. 11. Die der Abscisse $AO = x$, Fig. 24., entsprechende Ordinate $OP = y$ läßt sich aus unendlich vielen ungleichen Elementen $dy = FB$, GC, HD, KE . . . zusammensetzen, die lauter gleichen Elementen $dx = AF = FL = LM = MN$ . . . entsprechen. Wäre daher $dy = \varphi(x)\,.\,dx$ gegeben, so würde man y durch Summation aller derjenigen Werthe von dy finden, die sich herausstellen wenn man in $\varphi(x)\,.\,dx$ statt x nach und nach dx, $2\,dx$, $3\,dx$, $4\,dx$.. bis $n\,dx = x$ einsetzt. Diese Summation deutet man durch das sogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu summirenden Elemente setzt, schreibt also statt

$$y = [\varphi(dx) + \varphi(2dx) + \varphi(3dx) + \ldots + \varphi(x)]\,dx,$$
$$y = \int \varphi(x)\,dx.$$

Auch nennt man in diesem Falle y das Integral von $\varphi(x)\,dx$, so wie $\varphi(x)\,dx$ das Differenzial von y.

Zuweilen kann man das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(dx)$, $\varphi(2dx)$, $\varphi(3dx)$ u. s. w. bestimmen, viel einfacher ist es jedoch bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der sogenannten Intregralrechnung in Anwendung zu bringen.

Für das Differenzial $dy = mx\,dx$ hat man z. B. das Integral

$$y = \int mx\,dx = m\,dx\,(dx + 2dx + 3dx + \ldots + x)$$
$$= \left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{x}{dx}\right) m\,dx^2,$$

oder, da $1, 2, 3 \ldots \frac{x}{dx}$ eine gewöhnliche arithmetische Progression bildet (s. Ingenieur S. 141.), deren erstes Glied $= 1$, letztes Glied $= \frac{x}{dx}$ und Anzahl der Glieder ebenfalls $= \frac{x}{dx}$ ist,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{dx}\right)\frac{x}{dx}\,m\,dx^2,$$

und einfacher, da 1 gegen die unendlich große Zahl $\frac{x}{dx}$ verschwindet,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 .\, m\,dx^2 = \tfrac{1}{2}mx^2.$$

Art. 12. Aus der Formel $d[a + mf(x)] = m\,df(x)$ folgt durch Umkehrung $\int m\,df(x) = a + mf(x) = a + m\int df(x)$,

oder $df(x) = \varphi(x)\,.\,dx$ gesetzt,

$$\text{I.}\quad \int m\varphi(x)\,dx = a + m\int \varphi(x)\,dx,$$

und hieraus folgt, daß der constante Faktor m beim Integriren sowie beim Differenzüren unverändert bleibt, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes constantes Glied a nicht bestimmt werden kann; daß also das Integriren allein ein noch unbestimmtes Integral liefert. Um das constante Glied zu finden, müssen zwei zusammengehörige Werthe von x und $y = \int \varphi(x)\,dx$ bekannt sein. Ist für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int \varphi(x)\,dx = a + f(x)$ gefunden, so muß auch $k = a + f(c)$ sein, und es giebt daher die Subtraction $y - k = f(x) - f(c)$, also in diesem Falle

$$y = \int \varphi(x)\,dx = k + f(x) - f(c);$$

und man hat hiernach die Constante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbestimmte Integral

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1,\ y = 3 \text{ giebt,}$$

so hat man die nöthige Constante $a = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und daher das Integral

$$y = \int x\,dx = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbst die Constantenbestimmung läßt das Integral noch unbestimmt, weil noch für x als Urvariable jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz bestimmten Werth k_1 des Integrales haben, der einem bestimmten Werth c_1 von x entspricht, so muß man noch diesen in das gefundene Integral ein-, also $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ setzen.

So giebt z. B. $y = \int x\,dx = \frac{5+x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$. Meist ist derjenige Werth von x bekannt, bei welchem $y = 0$ ist; in diesem Falle hat man also $k = 0$, und es führt daher das unbestimmte Integral $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$ auf das bestimmte $k_1 = f(c_1) - f(c)$, das also gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbestimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe c_1 und c von x einsetzt, und die erhaltenen Werthe von einander subtrahirt. Um dies anzudeuten, schreibt man statt $\int \varphi(x)\,dx$, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn also z. B. $\int \varphi(x)\,dx = \frac{x^2}{2}$ ist, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx = \frac{c_1{}^2 - c^2}{2}$.

Die Umkehrung der Differenzialformel $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$ giebt die Integralformel $\int [df(x) + d\varphi(x)] = f(x) + \varphi(x)$, oder wenn man $df(x) = \psi(x)\,dx$ und $d\varphi(x) = \chi(x)\,dx$ setzt,

$$\text{II.} \quad \int [\psi(x)\,dx + \chi(x)\,dx] = \int \psi(x)\,dx + \int \chi(x)\,dx.$$

Es ist also hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

Z. B. $\int (3 + 5x)\,dx = \int 3\,dx + \int 5x\,dx = 3x + \frac{5}{2}x^2$.

Art. 13. Die wichtigste Differenzialformel des Artikels 8,

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx,$$

führt durch Umkehrung ebenfalls auf die wichtigste Integralformel. Es ist hier $\int nx^{n-1}\,dx = x^n$, oder $n \int x^{n-1}\,dx = x^n$, oder $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}$, setzt man also $n - 1 = m$, und hiernach

$n = m + 1$, so erhält man folgendes wichtige **Integral**:

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

das allein in der Anwendung mindestens eben so oft vorkommt, als alle übrigen zusammen.

Diese Form des Integrales weist auch darauf hin, daß dieses dem in Art. 7. abgehandelten und in Fig. 15. abgebildeten Curvensysteme entspreche.

Hiernach ist z. B. $\int 5x^3\, dx = 5 \int x^3\, dx = \frac{5}{4} x^4$; ferner

$$\int \sqrt[3]{x^4}\, dx = \int x^{4/3}\, dx = \frac{3}{7} x^{7/3} = \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7};$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{x^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x};$$

$$\int (4 - 6x^2 + 5x^4)\, dx = \int 4\, dx - \int 6x^2\, dx + \int 5x^4\, dx$$
$$= 4\int dx - 6\int x^2\, dx + 5\int x^4\, dx = 4x - 2x^3 + x^5;$$ ferner,

wenn man $3x - 2 = u$, also $3\, dx = du$, oder $dx = \frac{du}{3}$ einsetzt,

$$\int \sqrt{3x-2}\, dx, = \int u^{1/2} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{u^3}$$
$$= \frac{2}{9} \sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, also $4x\,dx = du$, d. i. $x\,dx = \frac{du}{4}$ gesetzt wird:

$$\int \frac{5x\, dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int \frac{5\, du}{4\sqrt[3]{u}} = \frac{5}{4} \int u^{-1/3} du = \frac{5}{4} \frac{u^{2/3}}{2/3} = \frac{15}{8} \sqrt[3]{u^2}$$
$$= \frac{15}{8} \sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe lassen sich diese unbestimmten Integrale sogleich in bestimmte verwandeln, z. B.

$$\int_1^2 5x^3\, dx = \frac{5}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{5}{4}.(16-1) = 18\tfrac{3}{4},$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1,$$

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2}\, .\, dx = \frac{2}{9}(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{9}(64-1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int (4 - 6x^2 + 5x^4)\, dx = 7$ für $x = 0$, so hätte man allgemein: $\int (4 - 6x^2 + 5x^4)\, dx = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Art. 14. **Die binomische Reihe:**

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

giebt, wenn man n unendlich groß setzt, so daß 1, 2, 3 u. s. w. gegen n verschwindet,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Setzt man ferner $x = dx$, und statt $n = \frac{x}{dx}$, so erhält man

$$(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = 1 + \frac{x}{dx}.dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{dx}\right)^3 dx^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

nehmen wir endlich $x = 1$, so erhalten wir

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \ldots = 2{,}71828\ldots,$$

eine Zahl, welche stets durch den Buchstaben e bezeichnet und die Basis des natürlichen oder hyperbolischen Potenzen- oder Logarithmen-Systemes genannt wird.

Da $(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = \left[(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\right]^x = e^x$, so hat man hiernach für die sogenannte Exponentialfunktion e^x die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Setzt man $a = e^{1/m}$, so ist $1/m = Log.\,nat.\,a$, d. i. der natürliche oder hyperbolische Logarithme von a, und daher

$$a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, so hat man umgekehrt

$$x = Log._a\, y \text{ und } \frac{x}{m} = Log.\,nat.\,y, \text{ daher}$$

$$Log._a\, y = m\; Log.\,nat.\,y, \text{ so wie umgekehrt}$$

$$Log\,nat.\,y \text{ oder } Log._e\, y = \frac{1}{m}\, Log._a\, y.$$

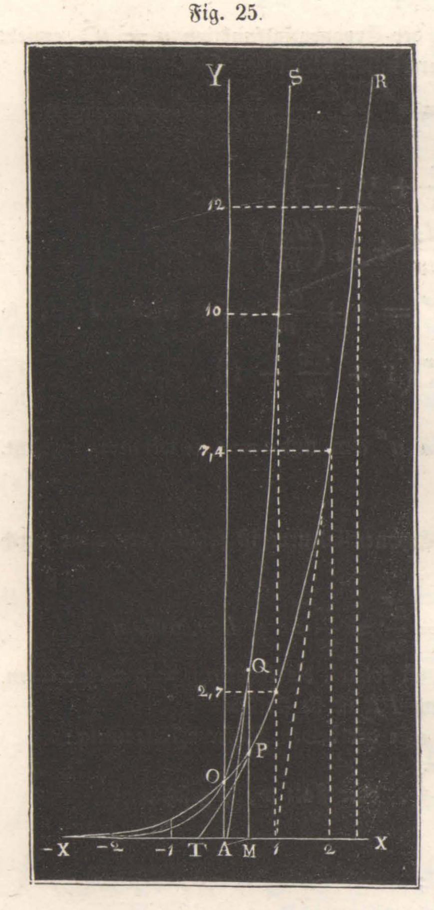
Die Zahl m heißt der Modul des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes. Es läßt sich also mit Hülfe desselben der natürliche Logarithme in jeden künstlichen, und umgekehrt ein solcher in den natürlichen verwandeln. Für das Briggische Logarithmensystem ist die Basis

$a = 10$, daher $1/m = Log. nat. 10 = 2{,}30258\ldots$, und umgekehrt der Modul $m = \frac{1}{Log. nat. 10} = 0{,}43429\ldots$

Es ist also $Log. y = 0{,}43429\ Log. nat. y$, und
$Log. nat. y = 2{,}30258\ Log. y$.
(Vergleiche Ingenieur, Seite 136 u. s. w.)

Art. 15. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunktionen $y = e^x$ oder $y = 10^x$ entsprechen, wird durch Fig. 25. veranschaulicht.

Fig. 25.



Für $x = 0$ ist in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$, deshalb gehen denn auch beide Curven PR und QS durch denselben Punkt (O) in der Ordinatenaxe. Für $x = 1$, giebt $y = e^x = 2{,}718\ldots$, und $y = 10^x = 10$, für $x = 2$, giebt

$y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389$

und $y = 10^x = 10^2 = 100$ u. s. w.; es steigen also auf der positiven Seite der Abscissenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, sehr stark an; dagegen ist für $x = -1$:

$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots}$

$= 0{,}368$ und

$10^x = 10^{-1} = 0{,}1$;

ferner für $x = -2$,

$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135$

und $10^x = 10^{-2} = 0{,}01$; endlich für $x = -\infty$, geben beide Gleichungen

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0.$

Es nähern sich also beide Curven auf der negativen Seite der Abscis-

senaxe dieser Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere mehr als die erstere; jedoch findet ein wirkliches Zusammentreffen mit dieser Axe nie Statt.

Da aus $y = e^x$, $x = Log.\ nat.\ y$ und ebenso

aus $y = a^x$, $x = Log._a\ y$ folgt,

so geben diese Curven auch eine Scala der natürlichen und Briggischen Logarithmen ab; es sind nämlich die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; es ist z. B. $AM = Log. nat. MP = Log.\ MQ$ u. s. w.

Art. 16. Das Differenzial der Exponentialfunktion $y = a^x$ ergiebt sich durch Anwendung der allgemeinsten Regel des Differenziirens:

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x . a^{dx} - a^x = a^x\ (a^{dx} - 1);$$

da aber die Exponentialreihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots,$$

$$a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{m}\right)^2 + \ldots$$

giebt, und der letzte Werth $a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m}$ gesetzt werden kann, so erhält man hiernach $dy = a^x \left(1 + \frac{dx}{m} - 1\right)$, d. i.

I. $d\,(a^x) = \frac{a^x dx}{m} = Ln.a.a^x\,dx$, und $a = e$, so wie $m = 1$ gesetzt.

I *). $d\ (e^x) = e^x\,dx$.

Der Tangentenwinkel α der Exponentialcurve ist folglich bestimmt durch die einfache Formel:

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{a^x\,dx}{m\,dx} = \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y\ Log.\ nat.\ a.$$

Bei der Curve QS, Fig. 25., ist folglich die $Subtang. = y\ cotg.\ \alpha = m$, also constant, und bei der Curve PR ist sie stets $= 1$.

Durch Umkehrung giebt die erste der beiden Differenzialformeln:

$$dx = m\ .\ \frac{d\,(a^x)}{a^x},$$ oder statt x, y gesetzt,

$$dy = m\,\frac{d\,(a^y)}{a^y};$$

nun ist aber für $x = a^y$, $y = Log._a\ x$, daher hat man:

II. $d\,(Log._a\, x) = m\,\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x\, Log.nat.\, a}$, so wie

II*). $d\,(Log.nat.\, x) = \frac{dx}{x}$.

Mittels dieser vier Regeln sind nun leicht folgende Beispiele durchzurechnen.

$d\,(e^{3x+1}) = e^{3x+1} \,.\, d\,(3x+1) = 3e^{3x+1}\,dx.$

$d\,(Log.nat.\, \sqrt[2]{x}) = \frac{d\,\sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{d\,(x^{1/2})}{x^{1/2}} = 1/2\,\frac{x^{-1/2}dx}{x^{1/2}} = \frac{dx}{2x}$,

oder auch $= d\,(1/2\, Log.nat.\, x) = 1/2\, d\,(Log.nat.\, x) = 1/2 \,.\, \frac{dx}{x}$.

$$d\; Log\;\; nat. \left(\frac{2+x}{x^2}\right) = d\;[Log.\;(2+x) - Log.\; x^2]$$
$$= d\; Log.\;(2+x) - d\; Log.\;(x^2)$$
$$= \frac{dx}{2+x} - 2\,\frac{dx}{x} = -\,\frac{(4+x)\,dx}{x\,(2+x)}.$$

Art. 17. Wenn man die Differenzialformeln des vorigen Artikels umkehrt, so stößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $d\,(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m}$, folgt $\int \frac{a^x\,dx}{m} = a^x$, d. i.

I. $\int a^x\,dx = m a^x = a^x : Log.\; nat.\; a$, und daher

I*). $\int e^x\,dx = e^x$.

Ferner aus $d\,(Log._a\, x) = \frac{m\,dx}{x}$, folgt $\int \frac{m\,dx}{x} = Log._a x$, d. i.

II. $\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{m}\; Log._a\, x = Log.\; nat.\; x$, und dasselbe giebt auch

die Formel $d\,(Log.\; nat.\; x) = \frac{dx}{x}$.

Hiernach lassen sich leicht folgende Beispiele berechnen.

$\int e^{5x-1}dx = 1/5 \int e^{5x-1}\, d\,(5x-1) = 1/5\; e^{5x-1}$.

$\int \frac{3\,dx}{7x+2} = 3/7 \int \frac{d(7x+2)}{7x+2} = 3/7\; Log.\; nat.\;(7x+2)$

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \int x\,dx + \int dx + 2\int \frac{d\,(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\, Log.nat.\,(x-1).$$

Die erste Integralformel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbestimmt, denn $m = -1$ gesetzt, folgt

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + \text{eine Constante} = \infty + \text{Constante};$$

setzen wir aber $x = 1 + u$, also $dx = du$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du, \quad \text{und daher}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du$$
$$= \int du - \int u\,du + \int u^2 du - \int u^3 du + \ldots$$
$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots;$$

es läßt sich also auch $Log.nat.(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$, oder

$$\text{III.} \quad Log.nat.x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

setzen.

Mit Hülfe dieser Reihe lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen, hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, so schlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man u negativ, so giebt die vorletzte Reihe:

$$Log.nat.(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \ldots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen:

$$Log.nat.(1+u) - Log.nat.(1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log.nat.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ gesetzt,}$$

$$\text{IV.} \quad Log.nat.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Diese Reihe ist auch zur Bestimmung der Logarithmen von solchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ stets unter 1 ist.

Es ist auch $Log.(x+y) - Log.x = Log.\left(\frac{x+y}{x}\right) = Log.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \text{rc.}$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots\right]$$

und daher

V. $$Log.(x+y) = Log.x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \ldots\right].$$

Diese Formel ist anzuwenden, um aus einem Logarithmen einen nächst größeren zu berechnen.

Z. B. $$Log.nat.2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{243} + \ldots\right)$$

$$= 2\left\{\begin{matrix}0{,}33333\\0{,}01234\\0{,}00082\\0{,}00007\end{matrix}\right\} = 2\ .\ 0{,}34656 = 0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log\ nat.8 = Log.nat.2^3 = 3\,Log.nat.2$ ist hiernach $= 2{,}0794415$, und endlich nach der letzten Formel

$$Log.nat.10 = Log.nat.(8+2)$$

$$= Log.\ nat.8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

(Vergl. Artikel 14.).

Art. 18. Von praktischer Wichtigkeit sind endlich noch die trigonometrischen und Kreisfunktionen, weshalb wir deren Differenziale und Integrale ebenfalls noch kennen lernen müssen.

Die Funktion $y = sin.\,x$ giebt für $x = 0$, $y = 0$;

für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}141}{4} = 0{,}785\ldots\ y = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707$,

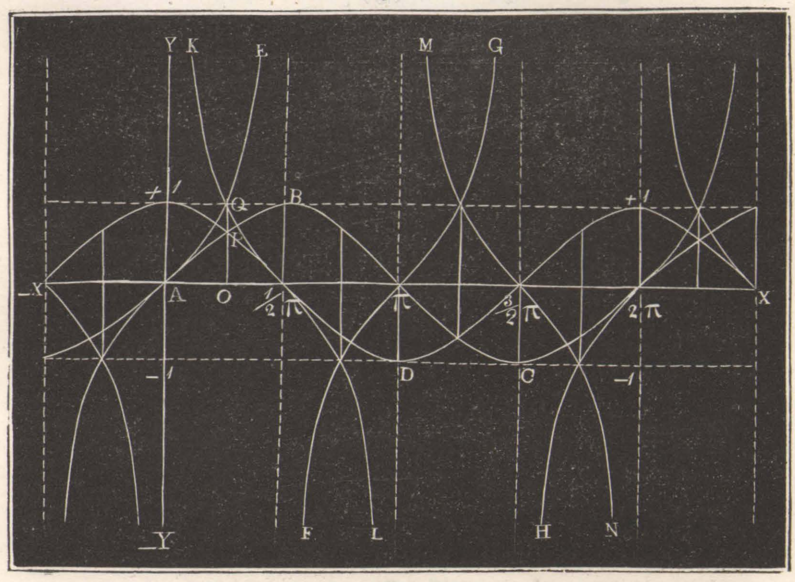
für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, für $x = \pi$, $y = 0$;

für $x = \tfrac{3}{2}\pi$, $y = -1$, für $x = 2\pi$, $y = 0$ u. s. w.,

trägt man daher x als Abscissen AO und y als die entsprechenden Ordinaten OP auf, so erhält man die schlangenförmige Curve ($APBC\ 2\pi$),

Fig. 26., welche sich nach beiden Seiten von A ins Unendliche fortsetzen läßt. Die Funktion $y = cos. x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$,

Fig. 26.



$y = \sqrt{½}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi$, $y = -1$, für $x = {}^3/_2\pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. s. w.; ihr entspricht daher genau dieselbe Schlangenlinie $\left(+ 1 P \frac{\pi}{2} D \frac{3\pi}{2} + 1\right)$ wie der Sinusfunktion, nur ist dieselbe auf den Abscissenaxen um $½\pi = 1,570$ . . weiter vor oder hinter der Sinuscurve.

Ganz anders sind aber die Curven gestaltet, welche den Funktionen $y = tang. x$ und $y = cotang. x$ entsprechen. Setzt man in $y = tang. x$, $x = 0$, $¼\pi$, $½\pi$, so erhält man $y = 0, 1, \infty$, und daher eine Curve (AQE), welche sich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abscissenaxe AX gehenden Parallele zur Ordinatenaxe AY immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}$, π, ${}^3/_2\pi$, so erhält man $y = -\infty$, 0, $+\infty$, und daher eine Curve $(F\pi G)$, die sich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $({}^3/_2\pi)$ bis ins Unendliche nähert, oder wie man sagt, diese Parallelen zu Asymptoten hat.

Bei ferneren Annahmen für x wiederholen sich dieselben Werthe von y, und deshalb wird also auch der Funktion $y = tang.\,x$ durch lauter Curven wie $(F\pi G)$, welche um π in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

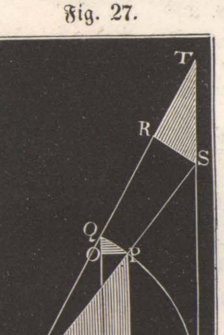
Die Funktion

$y = cotang.\,x$, giebt für $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi;\ y = \infty,\ 1,\ 0,\ -\infty$,

daher entspricht derselben eine Curve $(KQ\frac{\pi}{2}L)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch ist leicht einzusehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $(M\frac{3\pi}{2}N)$ u. s. w. dieser Funktion angehören.

Art. 19. Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Funktionen ergeben sich durch Betrachtung der Figur 27., in welcher

Fig. 27.



$CA = CP = CQ = 1$, Bog. $AP = x$, $PQ = dx$, ferner

$PM = sin.x \quad CM = cos.x,\ AS = tang.x$, endlich

$OQ = NQ - MP = sin.(x + dx) - sin.x$
$= d\ sin.\ x$,

$OP = -(CN - CM) = -cos.(x + dx) - cos.x$
$= -d\ cos.\ x$, und

$ST = AT - AS = tang.(x + dx) - tang.x$
$= d\ tang.x$ ist.

Da das Bogenelement PQ rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, und der Winkel PCA zwischen zwei Linien CP und CA dem Winkel PQO zwischen ihren Perpendikeln PQ und OQ gleich ist, so sind die Dreiecke CPM und QPO einander ähnlich, und es ist:

$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP}$, d. i. $\frac{d\ sin.x}{dx} = \frac{cos.\ x}{1}$, daher

I. $d\ sin.\ x = cos.\ x\ .\ d\,x$; ebenso auch

$\frac{OP}{PQ} = \frac{PM}{CP}$, d. i. $\frac{-d\ cos.x}{dx} = \frac{sin.x}{1}$, d. i.

II. $d\ (cos.x) = -\ sin.\ x\,d\,x$.

Man ersieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $cos.\ x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr

verändern, je größer $sin.\, x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von x eine Abnahme von $cos.\, x$ liefert, und umgekehrt eine Abnahme von x ein Wachsen von $cos.\, x$ giebt.

Legt man SR rechtwinkelig auf CT, so erhält man ein Dreieck SRT, welches wegen der Gleichheit der Winkel RTS und CQN oder CPM dem Dreiecke CPM ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CR}{CM}, \text{ d. i. } \frac{d\,tang.\, x}{SR} = \frac{1}{cos.\, x}.$$

Nun ist aber auch $\frac{SR}{CS} = \frac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \frac{CS\,.\,dx}{1}$ und

$$CS = secans.\, x = \frac{1}{cos.\, x}, \text{ daher } SR = \frac{dx}{cos.\, x} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad d\,(tang.\, x) = \frac{dx}{(cos.\, x)^2}.$$

Führt man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$, also statt dx, $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$ ein, so erhält man

$$d\ tang.\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{dx}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2}, \text{ d. i.}$$

$$\text{IV.} \quad d\,(cotg.\, x) = -\frac{dx}{(sin.\, x)^2}.$$

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$dx = \frac{d\,sin.\, x}{cos.\, x} = -\frac{d\,cos.\, x}{sin.\, x} = (cos.\, x)^2\, d\ tang.\ x$$
$$= -(sin.\ x)^2\, d\ cotang.\ x,$$

oder

$$dx = \frac{d\ sin.\, x}{\sqrt{1-(sin.\, x)^2}} = -\frac{d\ cos.\ x}{\sqrt{1-(cos.\ x)^2}} = \frac{d\ tang.\ x}{1+(tang.\, x)^2}$$
$$= -\frac{d\,cotang.\, x}{1+(cotang.\, x)^2}.$$

Bezeichnet man nun $sin.\, x$ durch y, und x durch $arc.\ (sin. = y)$, so erhält man:

$$\text{V.} \quad d\ arc.\,(sin. = y) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ und auf gleiche Weise findet man}$$

$$\text{VI.} \quad d\ arc.\,(cos. = y) = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ endlich}$$

VII. $d\ arc.\ (tang. = y) = \frac{dy}{1+y^2}$, so wie

VIII. $d\ arc.\ (cotang. = y) = -\frac{dy}{1+y^2}$.

Art. 20. Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln

I. $\int cos.x\,dx = sin.x$,

II. $\int sin.x\,dx = -cos.x$,

III. $\int \frac{dx}{cos.x^2} = tang.x$,

IV. $\int \frac{dx}{sin.x^2} = -cotg.x$,

ferner:

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.\ (sin. = x) = -arc.\ (cos. = x)$,

VI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.\ (tang. = x) = -arc.\ (cotang. = x)$,

und hierzu lassen sich leicht noch folgende finden.

Es ist $d\,(Log.nat.sin.x) = \frac{d\,sin.x}{sin.x} = \frac{cos.x\,.\,dx}{sin.x} = cotg.x\,.\,dx$,

folglich

VII. $\int cotg.x\,dx = Log.nat.sin.x$, ebenso

VIII. $\int tang.x\,dx = -Log.nat.cos.x$;

ferner $d\,(Log\ nat.tang.x) = \frac{d\,tang.x}{tang.x} = \frac{dx}{cos.x^2\,tang.x}$

$$= \frac{dx}{sin.x\ cos.x} = \frac{d\,(2x)}{sin.\,2x},$$

IX. daher $d\,(Log.nat\ tg.\tfrac{1}{2}x) = \frac{dx}{sin.x}$, und

X. $\int \frac{dx}{sin.x} = Log.\ nat.\ tang.\ \frac{x}{2}$, ebenso

XI. $\int \frac{dx}{cos.x} = Log.\ nat.\ tang.\ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$$= Log.\ nat.\ cotg.\ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Ferner $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$, gesetzt, folgt $1 = a(1-x) + b(1+x)$. Nimmt man $1+x=0$, also $x = -1$, so erhält man hiernach $1 = a(1+1)$, daher $a = \tfrac{1}{2}$, und nimmt man

$1 - x = 0$, also $x = 1$, so ergiebt sich $1 = 2b$, daher $b = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, endlich aber

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x}$$
$$= \tfrac{1}{2} Log.nat.(1+x) - \tfrac{1}{2} Log.nat.(1-x),$$

d. i.

XII. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, Log.\ nat.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, und ebenso

XIII. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\, Log.\ nat.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Endlich ist

XIV. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = Log.nat.\ (x + \sqrt{1+x^2})$ so wie

XV. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Log.nat.\ (x + \sqrt{x^2-1})$.

Art. 21. Um $arc.(tang. = x) = \int \frac{dx}{1+x^2}$ zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Division in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält so

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots, \text{ und}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2\,dx^0 + \int x^4\,dx - \int x^6\,dx + \ldots, \text{ d. i.}$$

I. $arc.\ (tang. = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \ldots$, z. B.

$\frac{\pi}{4} = arc.(tang. = 1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$, also den Halbkreis $\pi = 4\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots)$, oder

$\frac{\pi}{6} = arc.(tang. = \sqrt{\frac{1}{3}}) = \sqrt{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots)$,

folglich $\pi = 6\sqrt{\frac{1}{3}}\,(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \ldots) = 3{,}1415926\ldots$

Auf gleiche Weise erhält man aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \ldots$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int dx + \tfrac{1}{2}\int x^2\,dx + \tfrac{3}{8}\int x^4\,dx + \tfrac{5}{16}\int x^6\,dx + \ldots, \text{ d. i.}$$

II. $arc.\ (sin. = x) = x + \frac{1\,x^3}{2.3} + \frac{1.3\,x^5}{2.4.5} + \frac{1\ 3.5\,x^7}{2.4.6.7} + \ldots,$

z. B. $\frac{\pi}{6} = arc.(sin. = 1/2) = 1/2(1 + 1/24 + 3/640 + 5/7168 + \ldots)$, also

$$\pi = 3 \left\{ \begin{matrix} 1{,}04167 \\ 0{,}00468 \\ 0{,}00070 \end{matrix} \right\} = 3{,}141 \ldots$$

Ferner ist, wenn man

$sin.x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$ setzt,

$$\frac{d(sin.x)}{dx} = cos.x = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$$

$$\frac{d(cos.x)}{dx} = -sin.x = 2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots$$

$$-\frac{d(sin.x)}{dx} = -cos.x = 2.3.A_3 + 2.3.4.A_4 x + \ldots$$

$$-\frac{d(cos.x)}{dx} = sin.x = 2.3.4.A_4 + \ldots$$

Nun ist aber für $x = 0$, $sin.x = 0$, und $cos.x = 1$, daher folgt aus der ersten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2.3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ u. s. w. und wenn man diese Werthe in die fingirte Reihe einsetzt, die Sinusreihe:

$$\text{III.} \quad sin.x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$\text{IV.} \quad cos.x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.,}$$ ferner

$$\text{V.} \quad tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \ldots$$ und

$$\text{VI.} \quad cotang.x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} - \text{etc.}$$

(Vergl. Ingenieur, Seite 225.)

Art. 22. Ist $y = f(x)\varphi(x)$, d. i. ein Produkt von zwei Funktionen der Urvariablen x, so hat man für das Differenzial

$$dy = f(x + dx)\varphi(x + dx) - f(x)\varphi(x),$$ oder

$f(x + dx) = f(x) + df(x)$ und $\varphi(x + dx) = \varphi(x) + d\varphi(x)$ substituirt,

$dy = [f(x) + df(x)][\varphi(x) + d\varphi(x)] - f(x)\varphi(x)$, also, wenn man die Multiplication ausführt, und $f(x)\varphi(x)$ gegen $f(x)\varphi(x)$ hebt,

$dy = \varphi(x).df(x) + f(x).d\varphi(x) + df(x).d\varphi(x)$, und endlich,

wenn man $df(x) \,.\, d\varphi(x)$ als ein Produkt zweier Elemente oder unendlich kleiner Größen ausfallen läßt,

I. $d[f(x)\varphi(x)] = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x).$

Z. B. $d(x^2 \, Log.nat.x) = Log.nat.x \,.\, d(x^2) + x^2 \, d\,Log.nat.x$
$= Log.nat.x \,.\, 2x\,dx + x^2 \,.\, \frac{dx}{x} = (2\,Log.nat.x + 1)\,x\,dx.$

Ferner

$$d[(3x-1)\sqrt{x^2+1}] = \sqrt{x^2+1} \,.\, d(3x-1) + (3x-1)\,d[(x^2+1)^{1/2}]$$
$$= \sqrt{x^2+1} \,.\, 3\,dx + (3x-1) \,.\, \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}} . 2\,dx.$$

Umgekehrt giebt diese Formel

$$d\varphi(x) = \frac{d[f(x)\varphi(x)] - \varphi(x)\,df(x}{f(x)}, \text{ oder } f(x)\varphi(x) = \psi(x)$$

und folglich $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$ gesetzt,

$$d\varphi(x) = \frac{d\psi(x) - \frac{\psi(x)}{f(x)} \,.\, df(x)}{f(x)}, \text{ d. i.}$$

II. $$d\left(\frac{\psi(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)\,d\psi(x) - \psi(x)\,df(x)}{[f(x)]^2}.$$

Z. B. $d\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\,d(x^2-1) - (x^2-1)\,d(x+2)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)\,2x\,dx - (x^2-1)\,dx}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\,dx.$$

Durch Umkehrung der vorletzten Differenzialformel erhält man endlich noch folgende unter dem Namen der Reductionsformel bekannte Integralregel: $f(x)\varphi(x) = \int \varphi(x)\,df(x) + \int f(x)\,d\varphi(x)$, oder

III. $\int \varphi(x)\,df(x) = f(x)\varphi(x) - \int f(x)\,d\varphi(x).$

Z. B. $\int Log.nat.x \,.\, dx = Log.nat.x \,.\, x - \int x \,.\, d\,Log.nat.x$
$= x\,Log.nat.x - \int \frac{x\,dx}{x} = x\,(Log.nat.x - 1).$

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int e^x \,.\, 2x\,dx = x^2 e^x - 2\int x \,.\, e^x\,dx$$
$$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x\,dx) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)$$
$$= (x^2 - 2x + 2)\,e^x.$$

Art. 23. Eine Fläche ABC, Fig. 28., welche von einer Curve AB und ihren Coordinaten AC und BC begrenzt wird, läßt sich durch unendlich viele Ordinaten wie MP, NQ u. s. w. in lauter streifenförmige Elemente

von der constanten Breite $MN = dx$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegen; setzen wir daher diesen Flächenraum $ABC = F$, so haben wir für sein Element $MNQP$: $dF = y\,dx$,
und daher für ihn selbst: $F = \int y\,dx$.

Z. B. für eine Parabel mit dem Parameter p ist $y^2 = px$, und daher für die Fläche derselben

$$F = \int \sqrt{px}\,dx = \sqrt{p}\int x^{1/2} dx = \frac{\sqrt{p}\,x^{3/2}}{3/2} = {}^2/_3 x\sqrt{px} = {}^2/_3 xy.$$

Die Parabelfläche ABC ist also zwei Drittel von dem sie umschließenden Rechtecke $ACBD$.

Fig. 28.

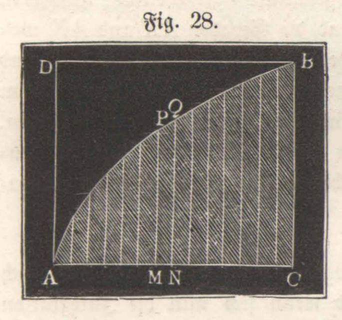
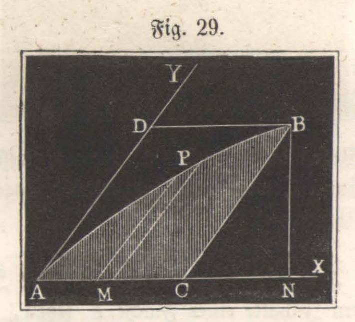
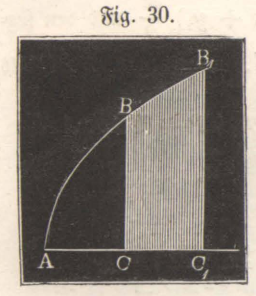


Fig. 29.



Diese Formel gilt auch für schiefwinkelige, unter einem Winkel α zusammenstoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche ABC, Fig. 29., wenn nur statt $BC = y$ der Normalabstand $BN = y\,sin.\,\alpha$ eingesetzt wird; man hat also hier $F = sin.\,\alpha \int y\,dx$, z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abscissenaxe AX einen Durchmesser und die Ordinatenaxe AY eine Tangente der Parabel bildet, also $y^2 = p_1 x = \frac{px}{sin.\,\alpha^2}$ ist (s. Ingenieur Seite 243.), $F = {}^2/_3 xy\,sin.\,\alpha$, d. i. Fläche $ABC = {}^2/_3$ Parallelogramm $ABCD$.

Fig. 30.



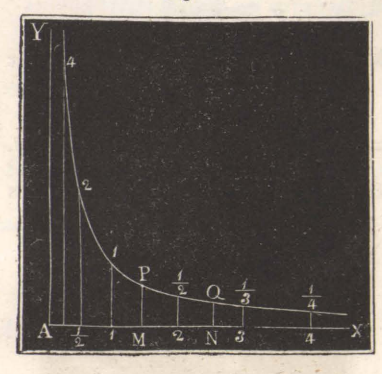
Für eine Fläche $BCC_1B_1 = F$ zwischen den Abscissen $AC_1 = c_1$ und $AC = c$, Fig. 30., ist nach Artikel 12, $F = \int_c^{c_1} y\,dx$.

Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ ist $F = \int_c^{c_1} \frac{a^2\,dx}{x}$ $= a^2\,(Log.\,nat.\,c_1 - Log.\,nat.\,c)$, d. i. $F = a^2\,Log.\,nat.\left(\frac{c_1}{c}\right)$.

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entspricht die oben in Artikel 3 kennen gelernte Curve PQ, Fig. 31. (s. folgd. Seite), und wenn

daher $AN = c_1$ und $AM = c$ ist, so giebt $F = a^2 \, Log. \, nat. \left(\frac{c_1}{c}\right)$ den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$, so hat man $F = Log. \, nat. \, x$; es sind hiernach die Flächenräume $(1MP1)$, $(1NQ1)$ u. s. w. die natürlichen Logarithmen der Abscissen AM, AN u. s. w. Die Curve selbst ist eine sogenannte gleichseitige Hyperbel, und die Geraden AX und AY, welchen sich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie zu erreichen, sind die Asymptoten derselben. Wegen dieses Zusammenhanges zwischen den Abscissen und den Flächenräumen, werden die natürlichen Logarithmen sehr oft hyperbolische Logarithmen genannt.

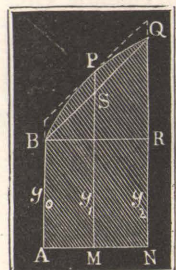
Fig. 31.



Art. 24. Man kann auch jedes Integral $\int y \, dx = \int \varphi(x) \, dx$ gleich dem Inhalte einer Fläche F setzen, und wenn sich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, so kann man es wenigstens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometrischen Hülfsmittel den Inhalt des entsprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Für eine Fläche $ABQN$, Fig. 32., die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ bestimmt ist, hat man den trapezoidalen Theil $ABQN = F_1 = (y_0 + y_2) \frac{x}{2}$ und den segmentförmigen Theil $BPQS$, wenn man BPQ als Parabel ansieht,

Fig. 32.



$$F_2 = \tfrac{2}{3} PS \, . \, BR = \tfrac{2}{3}(MP - MS) \, . \, AN$$
$$= \tfrac{2}{3} \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right) x,$$

daher die ganze Fläche

$$F = F_1 + F_1 = \left[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right] x$$
$$= \left[\tfrac{1}{6}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3} y_1\right] x = (y_0 + 4y_1 + y_2) \cdot \frac{x}{6}.$$

Führt man eine mittlere Ordinate y ein, und setzt $F = xy$, so erhält man hiernach für dieselbe:

$$y = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}.$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 33., zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ steht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 . . . y_n bestimmt ist, durch diese also in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel. Es ist die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche

Fig. 33.

des ersten Streifenpaares $= \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

» zweiten » $= \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

» dritten » $= \frac{y_4 + 4y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}$ u. s. w.;

also der Inhalt der ersten sechs Streifen oder ersten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ ist:

$$F = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\frac{x}{3 \cdot 6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]\frac{x}{18};$$

und nun leicht zu ermessen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche

$$F = [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]\frac{x}{3 \cdot 8},$$

und daß allgemein für eine Fläche aus n Streifen

$$F = [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})]\frac{x}{3n} \text{ ist.}$$

Auch ist die mittlere Höhe einer solchen Fläche

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})}{3n},$$

wobei n stets eine gerade Zahl sein muß.

Diese unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannte Formel (s. Ingenieur S. 254.) findet ihre Anwendung bei der Bestimmung eines

Integrales $\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c_0),\ y_1 = \varphi\left(c_0 + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c_0 + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c_0 + \frac{3x}{n}\right) \dots \text{ bis } y_n = \varphi(x)$$

berechnet, und diese Werthe in die Formel

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]\,\frac{c_1 - c}{3n}$$

einsetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist, wenn man $n = 6$, also $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = 1/6$ nimmt,

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000,\ y_1 = \frac{1}{7/6} = 6/7 = 0{,}8571,\ y_2 = \frac{1}{8/6} = 3/4 = 0{,}7500,$$

$$y_3 = \frac{1}{9/6} = 6/9 = 0{,}6666,\ y_4 = \frac{1}{10/6} = 0{,}6000,\ y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454$$

und $y_6 = 0{,}5000$, daher

$$y_0 + y_6 = 1{,}5000,\ y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692 \text{ und } y_2 + y_4 = 1{,}3500,$$

und das gesuchte Integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1{,}5000 + 4.2{,}0692 + 2.1{,}3500).1/18 = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

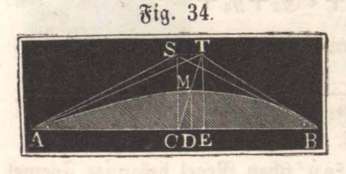
Nach Artikel 17. ist aber $\int_1^2 \frac{dx}{x} = Log.\ nat.\ 2 - Log.\ nat.\ 1$

$$= 0{,}693147,$$

also die Uebereinstimmung die erwünschte.

§. 25. Im Folgenden soll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl n von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein sehr gedrücktes Segment AMB, Fig. 34., als ein Parabelsegment, so hat man nach Art. 23. für den Inhalt desselben $F = 2/3\,AB.MD$, oder, wenn AT und BT Tangenten an den Enden A und B sind, und deshalb $CT = 2\,CM$ ist,

Fig. 34.



$$F = 2/3 \cdot \frac{AB\,.\,TE}{2} = 2/3 \text{ des}$$

Dreieckes $ATB = \frac{2}{3}$ des gleichhohen gleichschenkligen Dreieckes ASB, und also auch $= \frac{2}{3} AC \,.\, CS = \frac{2}{3} \overline{AC}^2 \,.\, tang.\, SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$ ist $= TAC + TAS = TBC - TBS$; setzt man daher die kleinen Winkel TAS und TBS einander gleich, so erhält man für dieselben

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ und}$$

$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel TAC und TBC durch δ und ε bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$ Sehne s ist, so hat man

$$F = \tfrac{1}{6} s^2 \, tang. \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Diese Formel läßt sich nun auch auf das Flächenstück $MABN$, Fig. 35., anwenden, dessen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben sind; setzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, so hat man

Fig. 35.

$$TAB = \delta = TAD - BAD = \alpha - \sigma$$

und

$$TBE = \varepsilon = ABE - TBE = \sigma - \beta,$$

daher

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta$$

und das Segment über AB:

$$F = \tfrac{1}{6} s^2 \, tang. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$,

$$F = \frac{s^2}{12} tang. (\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12} \left(\frac{tang.\, \alpha - tang.\, \beta}{1 + tang.\, \alpha \; tang.\, \beta}\right),$$ oder, wenn α und β nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang.\, \alpha \; tang.\, \beta$ statt α und β der Mittelwerth σ eingesetzt wird,

$$F = \tfrac{1}{12} s^2 \,.\, \frac{tang.\, \alpha - tang.\, \beta}{1 + tang.\, \sigma^2} = \tfrac{1}{12} s^2 \cos. \sigma^2 \, (tang.\, \alpha - tang.\, \beta),$$

und also statt $s \cos. \sigma$ die Grundlinie $MN = x$ substituirt,

$$F = \frac{x^2}{12} (tang.\, \alpha - tang.\, \beta),$$

und daher das ganze Flächenstück $MABN$, wenn y_0 und y_1 dessen Ordinaten MA und NB bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1) \frac{x}{2} + (tang.\, \alpha - tang.\, \beta) \frac{x^2}{12}.$$

Stößt an das vorige Flächenstück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten BN und $CO = y_1$ und y_2 und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, so hat man für dasselbe den Inhalt

$$F_2 = (y_1 + y_2)\,\frac{x}{2} + (tang.\beta - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da sich $-\,tang.\beta$ gegen $+\,tang.\beta$ hebt,

$$F = F_1 + F_2 = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2)\,x + (tang.\alpha - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen ist ebenso, wenn α den Tangentenwinkel des Anfangs- und δ den des Endpunktes bezeichnet,

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)\,x + (tang.\,\alpha - tang.\,\delta)\,\frac{x^2}{12},$$

und allgemein für eine durch die Abscissen $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\frac{3x}{n}$ . . . x, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ und die Tangentenwinkel $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ bestimmtes Flächenstück

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi\,(x)\,d\,x$$
$$= (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

wird hiernach gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ setzt,

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$
$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots y_n = \varphi\,(c_1),$$

so wie $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \psi\,(x), = \psi\,(c)$ und $tang.\,\alpha_n = \psi\,(c_1)$ berechnet, und diese Werthe in diese Gleichung einsetzt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier $x = c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi\,(x) = \frac{1}{x}$ ist,

$y_0 = \frac{1}{c} = 1$, $y_1 = \frac{1}{1 + 1/6} = 6/7$, $y_2 = 6/8$, $y_3 = 6/9$, $y_4 = 6/10$, $y_5 = 6/11$ und $y_6 = 6/12$, ferner da sich $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^{-1})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ herausstellt, $tang.\,\alpha = -1/1 = -1$ und $tang.\,\beta = -1/2^2 = -1/4$, und daher ist

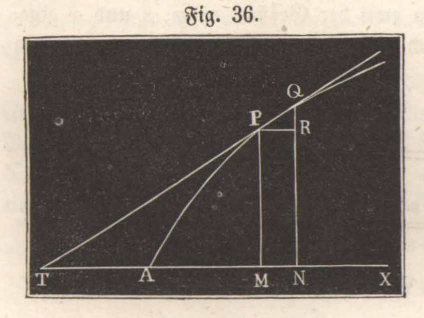
$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1/2 + 6/7 + 6/8 + 6/9 + 6/10 + 6/11 + 1/4) \cdot 1/6 + (-1 + 1/4) \cdot 1/12 \cdot 1/36$$

$$= \frac{4{,}1692}{6} - 3/4 \cdot 1/12 \cdot 1/36 = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beispiel des vorigen Artikels.)

§. 26. Aus der Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$ (Fig. 36.) einer Curve muß sich auch eine Gleichung zwischen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten ableiten lassen. Läßt man x um $MN = PR = dx$ wachsen, so nimmt y um $RQ = dy$ und s um das Element $PQ = ds$ zu, und es ist dem Pythagoräischen Lehrsatze zu Folge

Fig. 36.



$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$, d. i.

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, also

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, und hiernach der Curvenbogen selbst

$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Z. B. für die Neil'sche Parabel (s. Fig. 15.), deren Gleichung $ay^2 = x^3$ ist, hat man $2ay\,dy = 3x^2 dx$, daher

$$dy = \frac{3x^2 dx}{2ay} \text{ und } dy^2 = \frac{9x^4 dx^2}{4a^2y^2} = \frac{9x\,dx^2}{4a},$$

hiernach $ds^2 = \left(1 + \frac{9x}{4a}\right) dx^2$ und

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\, dx = \frac{4a}{9} \int \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{1/2} d\left(\frac{9x}{4a}\right)$$

$$= \frac{4a}{9} \int u^{1/2} du = \frac{4a}{9}\, 2/3\, u^{3/2} = 8/27\, a \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Constante zu finden, wollen wir s mit x und y zugleich anfangen lassen. Wir erhalten dann

$$0 = 8/27\, a \sqrt{1^3} + Con., \text{ also } Con. = -\, 8/27\, a \text{ und}$$

$$s = 8/27\, a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück AP, dessen Abscisse $x = a$ ist,

$$s = 8/27\, a\, [\sqrt{(13/4)^3} - 1] = 1{,}736\, a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $QPR = PTM = \alpha$ (Fig. 36.) ein, so hat man auch

$$QR = PQ . sin. QPR \text{ und } PR = PQ \cos. QPR, \text{ d. i.}$$
$$dy = ds\, sin. \alpha \text{ und } dx = ds\, cos. \alpha,$$

und also außer $tang. \alpha = \frac{dy}{dx}$ (s. Art. 5.) auch

$$sin. \alpha = \frac{dy}{ds} \text{ und } cos. \alpha = \frac{dx}{ds}; \text{ so wie noch}$$

$$s = \int \sqrt{1 + tang. \alpha^2} . dx = \int \frac{dy}{sin. \alpha} = \int \frac{dx}{cos. \alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen x, y, s und α gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos. \alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$, so hat man

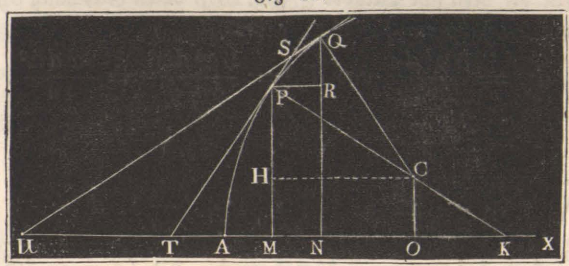
$$dx = ds\, cos. \alpha = \frac{s\, ds}{\sqrt{c^2+s^2}} \text{ und}$$

$$x = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{2 s\,ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} du$$

$= \sqrt{c^2 + s^2} + Con.$, und wenn nun x und s zugleich Null sind, $x = \sqrt{c^2 + s^2} - c$.

§. 27. Eine Gerade winkelrecht zur Tangente PT, Fig. 37., ist auch normal zur Berührungsstelle P der Curve, weil die Tangente die Richtung

Fig. 37.



dieser Stelle angiebt. Das Stück PK dieser Linie vom Berührungspunkte P bis Abscissenaxe, heißt Normale schlechtweg, und die Projection MK desselben in der Abscissenaxe Subnormale. Für die letztere hat man, da der Winkel MPK dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist, $MK = MP . tang. \alpha$, d. i.

$$Subnormale = y\, tang. \alpha = y \frac{dy}{dx},$$

z. B. für die Parabel, wo $y^2 = px$, also $dy = \frac{p\,dx}{2\,y}$ ist,

$$Subnormale = y \frac{p}{2\,y} = \frac{p}{2}; \text{ also constant.}$$

Errichtet man ferner in einem zweiten, dem P unendlich nahen Punkte Q eine andere Normallinie QC, so erhält man in dem Durchschnittspunkte C zwischen beiden ein Centrum für einen durch beide Berührungspunkte P und Q zu beschreibenden Kreis, den sogenannten Krümmungskreis, und es sind die Stücke CP und CQ der Normallinien die Halbmesser dieses Kreises oder die sogenannten Krümmungshalbmesser. Jedenfalls ist dieser Kreis derjenige unter allen durch P und Q zu legenden Kreisen, welcher sich am meisten an das Curvenelement PQ anschmiegt, und deshalb anzunehmen, daß sein Bogen PQ mit dem Curvenelemente PQ zusammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ durch r, den Curvenbogen AP durch s, also sein Element PQ durch ds, und den Tangentenwinkel oder Bogen von PTM durch α, also sein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $d\alpha$, so haben wir einfach, da $PQ = CP$. Bog. des Winkels PCQ ist, $ds = - r d\alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser $r = - \frac{ds}{d\alpha}$.

Gewöhnlich läßt sich α nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt $tang. \alpha = \frac{dy}{dx}$. Nun ist aber noch $d\, tang. \alpha = \frac{d\alpha}{cos. \alpha^2}$ und $cos. \alpha = \frac{dx}{ds}$, daher hat man

$$d\alpha = cos. \alpha^2 . d\, tang. \alpha = \frac{dx^2}{ds^2} . d\, tang. \alpha, \text{ und}$$

$$r = - \frac{ds^3}{dx^2\, d\, tang. \alpha}.$$

Durch Umkehrung dieser Formeln kann man auch wohl die Curve selbst rectificiren, also s selbst finden.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes C hat man

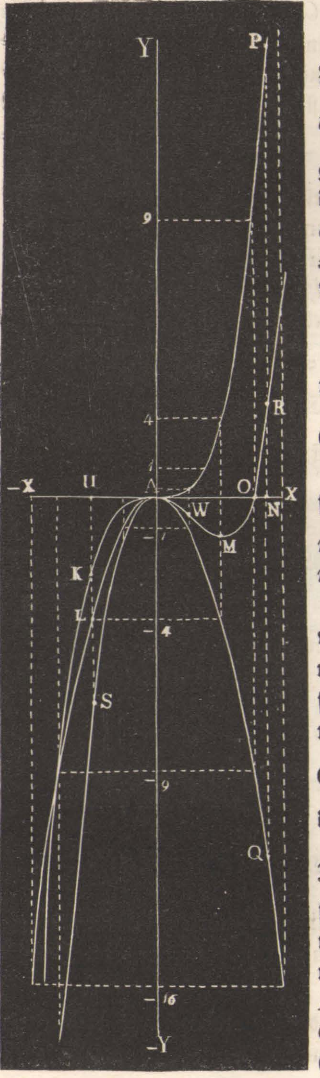
$$u = AM + HC = x + CP \sin\, CPH, \text{ d. i.}$$
$$u = x + r \sin. \alpha, \text{ so wie}$$
$$v = OC = MP - HP = y - CP \cos. CPH, \text{ d. i.}$$
$$v = y - r \cos. \alpha.$$

Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von AP genannt wird, und deren Lauf durch die Coordinaten u und v bestimmt wird.

§. 28. Viele Funktionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, lassen sich aus den oben kennen gelernten Hauptfunktionen $y = x^m$, $y = e^x$ und $y = sin. x$, $y = cos. x$ u. s. w. zusammensetzen, und sind daher auch die Eigenschaften, entsprechend der Tangenten-

lage, Quadratur, Krümmungshalbmesser u. s. w. leicht mit Hülfe der vorstehenden Lehren aufzusuchen, so wie auch die entsprechenden Curven zu construiren, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Fig. 38.



Die Gleichung sei

$$y = x^2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^3}{3} - x^2.$$

Für sie ist $dy = (x^2 - 2x)\,dx$, folglich $tang.\alpha = \frac{dy}{dx} = x^2 - 2x$, daher die Tangente der Abscissenaxe parallel, für $x^2 = 2x$, d. i. $x = 0$ und $x = 2$, ferner ist $d\,tang.\alpha = 2(x-1)\,dx$, und daher für $x = 1$ und $y = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ ein Wendepunkt. Ferner ist noch

$$ds^2 = dx^2 + (x^2 - 2x)^2\,dx^2$$
$$= [1 + (x^2 - 2x)^2]\,dx^2,$$

und daher der Krümmungshalbmesser der Curve: $r = -\frac{[1+(x^2-2x)^2]^{3/2}}{2(x-1)}$, z. B. für $x = 0$, $r = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, für $x = 1$, $r = \infty$, für $x = 2$, $r = -\frac{1}{2}$, $x = 3$, $r = -7{,}905$ u. s. w.

Die entsprechende Curve führt Fig. 38. vor Augen. Es ist $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe, A aber der Anfangs- oder Nullpunkt. Durch diesen geht nicht nur die Curve KAP, welche der Gleichung $y_1 = \frac{x^3}{3}$ entspricht, sondern auch die Curve LAQ, welche der Gleichung $y_2 = -x^2$ angehört. Da $y = \frac{x^3}{3} - x^2$, so findet man einen Punkt R der Curve, welcher dieser Gleichung entspricht, wenn man $y_2 = NQ$ von $y_1 = NP$ abzieht, also $NR = NP - NQ$ macht. Dies an vielen Stellen ausgeführt, erhält man die gesuchte Curve $SAWMOR$, welche bei W einen Wendungspunkt hat, bei A und O die Abscissenaxe trifft, und bei A und M parallel mit dieser Axe läuft.

Art. 29. Wenn für eine Funktion $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der Variablen u, v und y durch Beobachtung oder Messung gefunden worden sind, so kann man nach denjenigen Werthen der Constanten α und β fragen, welche von den kleinen zufälligen und unregelmäßigen Beobachtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind und daher auch den Zusammenhang zwischen den Größen u, v und y, wovon u und v auch bekannte Funktionen einer und derselben Variablen x bedeuten können, möglichst genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrscheinlich richtigsten Werthe der Constanten anwendet, ist die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate** die allgemeinste und wissenschaftlich begründetste.

Sind $\left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n \end{matrix}\right\}$ die der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden Resultate der Beobachtung, so hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{matrix}\right\} \text{ und}$$

$$\left\{\begin{matrix} z_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\ z_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\ z_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2 \end{matrix}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man sich der Abkürzung wegen des Summationszeichens Σ bedient, um eine Summation

gleichartiger Größen anzuzeigen, also $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \ldots + v_n y_n = \Sigma(vy)$ setzt, u. s. w.

$$\Sigma(z^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(uy) - 2\beta\Sigma(vy) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(uv) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratsumme $\Sigma(z^2)$ nur die hier als Urvariabele anzusehenden Constanten α und β der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert nun, sowohl α als auch β so zu wählen, daß die Quadratsumme $\Sigma(z^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müssen wir die gewonnene Funktion für $\Sigma(z^2)$ ein Mal in Beziehung auf α und ein Mal in Beziehung auf β differenziiren, und jeden der sich herausstellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(z^2)$ gleich Null setzen. Dadurch stößt man auf folgende zwei Bestimmungsgleichungen für α und β

$$-\Sigma(uy) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(uv) = 0,$$
$$-\Sigma(vy) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(uv) = 0;$$

deren Auflösung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}.$$ (Vgl. Ingenieur, S. 131.)

Diese Formeln gehen für eine Funktion $y = \alpha + \beta v$, da hier $u = 1$, also $\Sigma(uv) = \Sigma(v)$, $\Sigma(uy) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1 + 1 + 1 + \ldots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(v)\,\Sigma(vy)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(vy) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Funktion $y = \beta v$, wo $\alpha =$ Null ist erhält man

$$\beta = \frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v^2)},$$

und endlich für den einfachsten Fall $y = \alpha$, wo es sich also um die Ausmittelung des wahrscheinlichsten Werthes einer einzigen Größe handelt, ist

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

also dieser Werth das arithmetische Mittel aus allen durch Messung oder Beobachtung gefundenen Werthen.

Beispiel. Um das Gesetz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeschwindigkeit c und Beschleunigungsmaaß p kennen zu lernen, hat man die verschiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 u. s. w. entsprechenden Räume s_1, s_2, s_3 u. s. w. gemessen, und dabei Folgendes gefunden:

Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
Räume:	0	5	20	38	58½	101 Fuß.

Ist nun $s = ct + \frac{pt^2}{2}$ das dieser Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgesetz, so handelt es sich um die Ermittelung der Constanten c und p. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, sowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, so erhält man zur Berechnung von c und p folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\Sigma(st) - \Sigma(t^3)\Sigma(st^2)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\Sigma(st^2) - \Sigma(t^3)\Sigma(st)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)},$$

wonach sich folgende Rechnung führen läßt.

t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
10	100	1000	10000	101	1010	10200
Summen	184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(st)$	14101,5 $= \Sigma(st^2)$.

Hieraus bestimmt sich

$$c = \frac{13108 \,.\, 1674{,}5 - 1496 \,.\, 14101{,}5}{184 \,.\, 13108 - 1496 \,.\, 1496} = \frac{85340}{17386} = 4{,}908 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{184 \,.\, 14101{,}5 - 1496 \,.\, 1674{,}5}{184 \,.\, 13108 - 1496 \,.\, 1496} = \frac{89624}{173860} = 0{,}5155 \text{ Fuß},$$

und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung

$s = 4{,}908t + 0{,}5155 \,.\, t^2$.

Nach dieser Formel hat man

für die Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
die Räume:	0	5,43	19,36	37,43	59,62	100,63 Fuß.



Verbesserungen

in der ersten Auflage der Ingenieur- und Maschinenmechanik.

Erster Band.

Seite	Zeile		statt:	
Seite 31	Zeile 3	von unten,	statt:	als, als den.
» 38	» 16	» »	»	gesetzter materieller, gesetzte materielle.
» 79	» 20	» »	»	Summe 3 Pfd., 4 Pfd.
» 108	» 2	» oben,	»	$= V$, $V =$.
» 134	» 15	» »	»	$-S_1 s$, $-S_2 s$.
» 147	» 15	» »	»	mal, mal den.
» 148	» 8	» unten,	»	*p. fixed*, *fixed p*.
» »	» 5	» »	»	*p. moveable*, *moveable p*.
» 163	» 1	» »	»	$f C \sin.\varrho$, $G \sin.\varrho$.
» 181	» 8	» oben,	»	HR, HK.
» 202	» 3	» unten,	»	l^2, l^3.
» 206	» 13	» »	»	$\frac{3h}{h}$, $\frac{3h}{n}$.
» 219	» 6	» oben,	»	a_1, a_1^3.
» 244	» 16	» »	»	einen, einem.
» 246	» 8	» unten,	»	ex, ex_1.
» 266	» 15	» »	»	Führug, Führung.
» 311	» 16	» oben,	»	D, CD.
» 325	» 6	» »	»	die, den.
» 345	» 9	» unten,	»	CK, CH.
» 353	» 2	» oben,	»	$Fh\gamma$, $2Fh\gamma$ (S. II., §. 146).
» 357	» 13	» unten,	»	Gomogen, homogen.
» 382	» 6	» oben,	»	0,00267, 0,00367.
» 419	» 3	» »	»	eine, um eine.
» 442	» 3, 11, 14, 16, 19	von oben,	statt:	$\frac{l}{d}$, $\frac{l}{d_1}$.
» 452	» 13	von unten,	statt:	13 — 3,084,7, 133,0 — 84,7.
» 479	» 4	» »		ist μ zu streichen.
» 496	» 2	» oben,	statt	$\frac{lp}{F}$, $\frac{F}{lp}$.
» 534	» 18 u. s. w.	von oben,	statt:	$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} - h_1 - \mu \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{2g} s_1$,

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} - s_1 \sin.\alpha_1 - \mu \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{2g} s_1;$$

$$\text{daher } v_2 = \sqrt{\frac{(1 - \mu s_1) v_1^2 - 2 g s_1 \sin.\alpha_1}{1 + \mu s_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \mu \varphi_1 r_1) v_1^2 - 2 g \varphi_1 r_1 \sin.\alpha_1}{1 + \mu \varphi_1 r_1}} \text{ u. s. w.}$$

Zweiter Band.

Seite	Zeile	von	statt:	
Seite 41	Zeile 6	von unten,	statt:	gewlöbter, gewölbter.
» 50	» 10	» oben,	»	$\frac{1}{2}Q$, Q.
» »	» 18	» »	»	$2 sin. \delta$, $sin. \delta$, und
» »	» »	» »	»	$\frac{1}{2}Q$, Q.
» 117	» 7	» »	»	$(G + G_1 - Q) sin. \alpha$, $[(G + G_1) sin. \alpha - Q]$.
» »	» 11	» »	»	$f r sin. \alpha$, $f r$.
» 175	» 11	» »	»	es das Wasser, es das Rad.
» 220	» 14	» unten,	»	$Q - (Q_2 + Q_4)$, $Q_4 - Q_2$.
» »	» 13	» »	»	$Q_4 =$, $Q_4 = Q -$.
» 248	» 11	» »	»	c^2, $c^2 + 2 g h_1$.
» »	» 8	» »	»	c^2, $c^2 + 2 g h_1$.
» »	» 7	» »		ist $-2 g h_1$ zu streichen.
» »	» 5	» »		ist $-g h_1$ zu streichen.
» 299	» 12	» »	statt:	$\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{80}$.
» 301	» 17	» oben,	»	gefällverlust, Gefällverlust.
» 313	» 15	» unten,	»	ihr, der.
» 373	» 10	» oben,	»	Q und $4Q$, $2Q$ und $8Q$.
» »	» 11	» »	»	$4Q$, $8Q$.
» 413	» 9	» unten,	»	den Wind, die Luft.
» 442	» 19	» oben,	»	» 2 » » », » » » 2 ».
» »	» 20	» »	»	» 3 » » 1, » 1 » » 3.
» »	» 21	» »	»	» 3 » » », » » » » 3.
» 448	» 4	» »	»	Volumen, Drucke.
» »	» 5	» »	»	Drucke, Volumen.
» »	» 8	» »	»	Drucke, Gewichte.
» »	» 10	» »	»	0,276, 0,267.
» 463	» 1	» »	»	$\frac{\gamma_1}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\gamma_1}$.
» 602	» 15	» »	»	$\beta - p$, $\beta + p$.
» 613	» 5	» »	»	ε, ν.
» 615	» 11	» »	»	$t_2 - t_0$, $\mu(t_2 - t_0)$.
» »	» 10	» unten,		ist Fs am Ende zu streichen.
» 618	» 11	» »	statt	Schmidt, Holtzmann.

---

gig gemacht werde; von diesem Standpunkte ging der Verfasser bei der Bearbeitung des Werkes aus, und es gelang ihm, die Lehren der Physik in wahrhaft würdiger Weise populär und allgemein verständlich zu machen, ohne den streng wissenschaftlichen Anforderungen etwas zu vergeben.

Die rasche und ehrende Anerkennung dieses Buches wird schon seine vollgültige Empfehlung begründen; es darf aber hinzugefügt werden, dass Müller's Lehrbuch der Physik auf den meisten deutschen Universitäten und höheren technischen Lehranstalten den Vorträgen zum Grunde gelegt oder den Zuhörern zum Nachstudium empfohlen wird, und dass es die lebhafteste Theilnahme und Anerkennung unter allen denen gefunden hat, welchen das Selbstudium der Physik als Hülfswissenschaft, unentbehrlich geworden ist. — Der Mediciner, der Chemiker, der Pharmaceut, der Techniker, der Agronom, der Forst-, Berg- und Hüttenmann, der Architekt etc., kann der physikalischen Kenntnisse, jeder Gebildete kann ihrer nicht mehr entbehren.

Die äussere Ausstattung ist eine solche, welche die Bestrebungen des Verfassers unterstützt; 1460 vortrefflich ausgeführte in den Text eingedruckte Holzstiche, sowie 13 zum Theil in Farbendruck ausgeführte Stahlstich-Tafeln vermehren die Deutlichkeit und Verständlichkeit ungemein. — Der Preis ist für diese Ausstattung ein überaus billiger.

Lehrbuch der Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen auf Maschinen- und Bau-Constructionen.

Für den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Privatstudium, für angehende Ingenieure und Architekten bearbeitet

von Ad. Wernicke,

ordentlichem Lehrer an der Provinzial-Gewerbe-Schule zu Görlitz und Ingenieur.

In zwei Theilen.

Erster Theil.

Mechanik fester Körper.

Mit 376 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 25 Sgr.

Zweiter Theil:

Mechanik flüssiger Körper.

Mit 170 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 5 Sgr.

Das vorliegende Lehrbuch behandelt in elementarer Weise die Mechanik, und ist, besonders für den Unterricht an den Gewerbeschulen, als Leitfaden zu benutzen. Der Verfasser ist bemüht gewesen, in einer recht klaren, möglichst kurzen Darstellungsweise die für das erste Studium der Mechanik nothwendigen Gesetze zum Verständniss zu bringen. Erweiterungen derselben, sowie vielfache Uebungen aus den Maschinen- und Bau-Constructionen sind nach jedem Capitel für sich zusammengestellt, wodurch sich das Buch hauptsächlich für den Schul-Gebrauch eignet.

Andrerseits kann das Buch den Studirenden an höheren polytechnischen Anstalten ganz besonders zur Privat-Benutzung empfohlen werden, da sich der Gang in dem vorliegenden Buche dem Vortrage in der analytischen Mechanik so viel als möglich anschliesst, und zu gleicher Zeit zeigt, wie die erhaltenen Resultate auf zweckmässige Weise zur Lösung von Aufgaben aus dem mechanischen Gebiete benutzt werden können. Bei den Rechnungen dient das Zollpfund gleich 500 Grammes als Einheit. Das Werk besteht aus zwei Bänden. Der erste enthält die Mechanik der festen Körper und einen Anhang über die Maschinen im Allgemeinen. Der zweite Band behandelt die Mechanik der flüssigen Körper und liefert in den Uebungen die Theorie und Berechnung der hauptsächlichsten Kraftmaschinen (Wassersäulenmaschinen, Wasserräder, Turbinen, Dampfmaschinen) und einiger wichtigen Arbeitsmaschinen (Pumpen, Cylinder-Gebläse, Ventilatoren).